

4 Modulação por código de pulsos (PCM-Pulse Code Modulation)

Neste capítulo iremos a transmissão de sinais analógicos através da modulação por códigos de pulsos. A modulação por código de pulsos de um sinal analógico tem por objectivo a sua transmissão digital.

4.1 Arquitectura do sistema gerador de sinais PCM

A **Figura 4.1**, mostra a arquitectura de um sistema gerador de sinais PCM. O sinal analógico $x(t)$, passa por um filtro passa baixo (FPBaixo) e é amostrado pelo circuito de amostragem e retenção (S&H Sample & Hold) obtendo-se o sinal PAM $x(kT_s)$. De seguida o sinal é quantificado em q níveis discretos. O sinal amostrado e quantificado $x_q(kT_s)$ é então codificado.

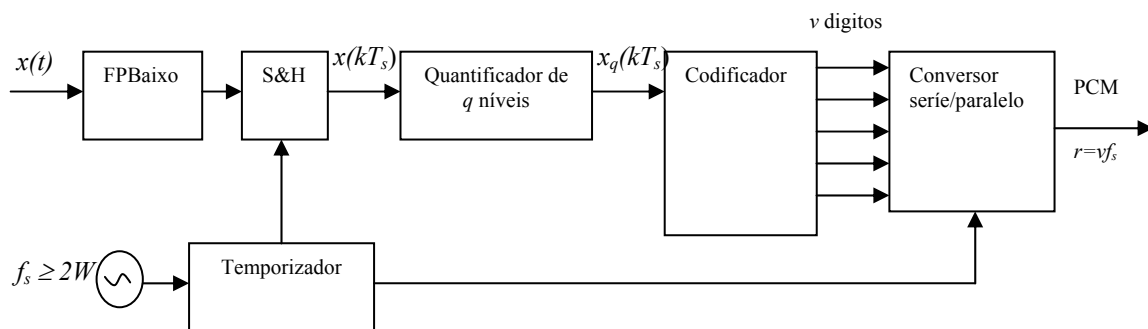


Figura 4.1 Sistema gerador de sinais PCM.

A operação de quantificação consiste na quantificação do sinal PAM em q níveis. Considerando o sinal analógico um sinal de tensão normalizado tal que $|x(t)| \leq 1$ V. Se a quantificação for uniforme a gama de tensões de 2 V (o valor máximo da amplitude do sinal pico a pico) é dividida em q níveis igualmente espaçados, sendo a separação entre níveis de $\Delta = \frac{2}{q}$ V.

Os níveis discretos são $\pm \frac{1}{q}, \pm \frac{3}{q}, \pm \dots, \pm \frac{q-1}{q}$, como se mostra na figura, para $q = 8$.

De seguida o codificador codifica cada nível discreto numa palavra de um código digital

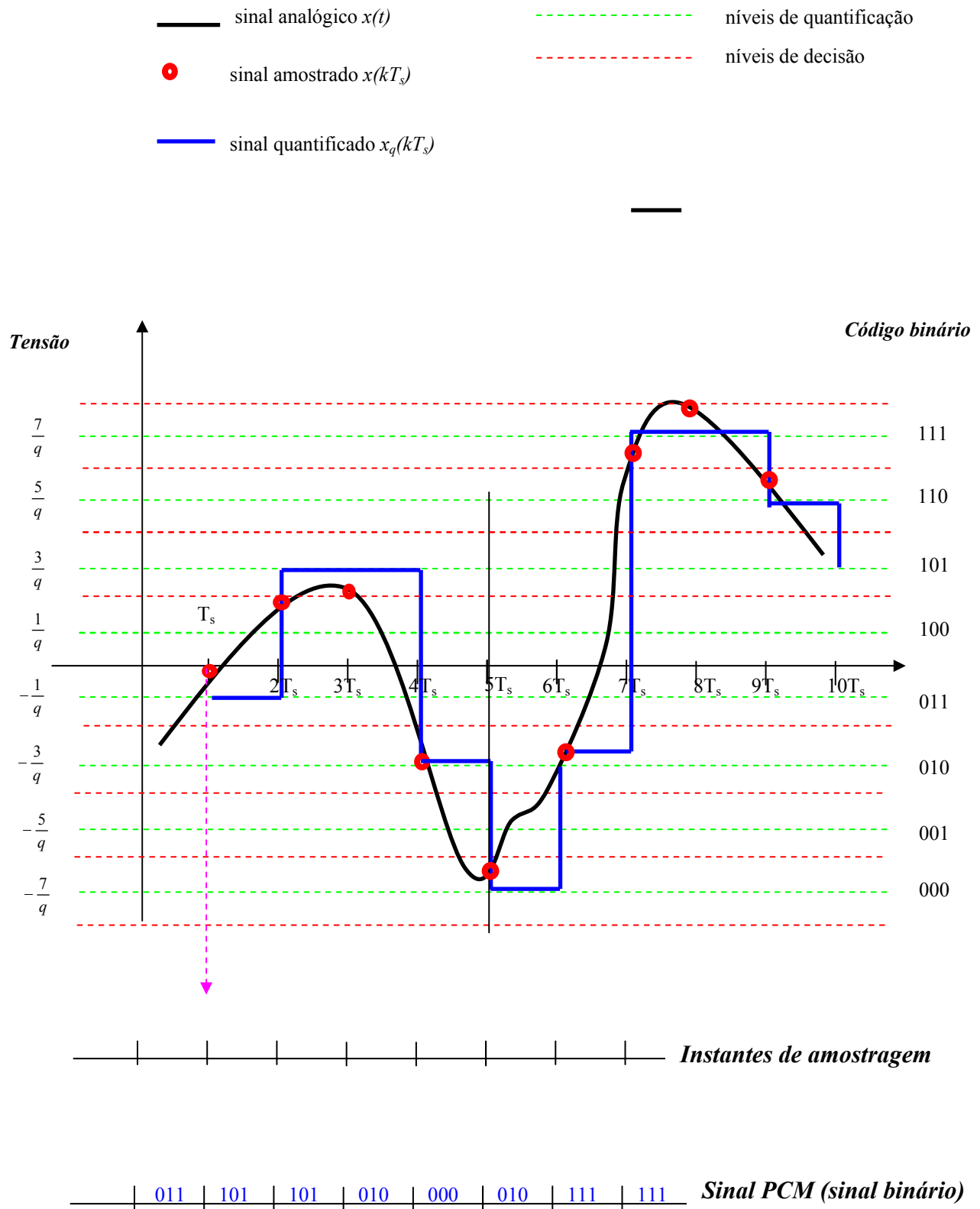


Figura 4.2 Esquema ilustrativo do processo de modulação por código de pulso.

Operações envolvidas:

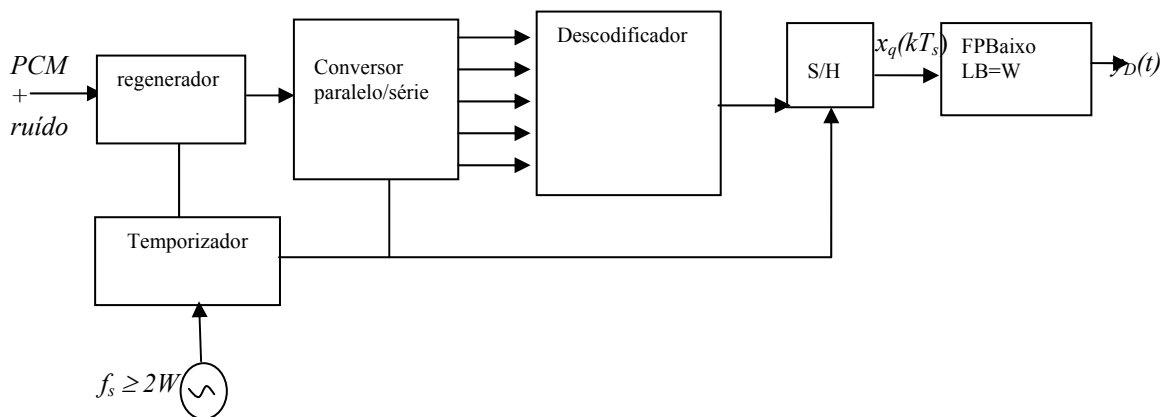
- 1º amostragem de acordo com o teorema de Nyquist;
- 2º quantificação, o sinal é quantificado para o nível mais próximo, nesta operação é cometido o erro de quantificação;
- 3º cada nível de quantificação é codificado utilizando-se v bits, $q=2^v$;
- 3º a cada amostra quantificada faz-se corresponder o conjunto de bits equivalente.

4.2 Taxa de geração de dados binários num sistema PCM

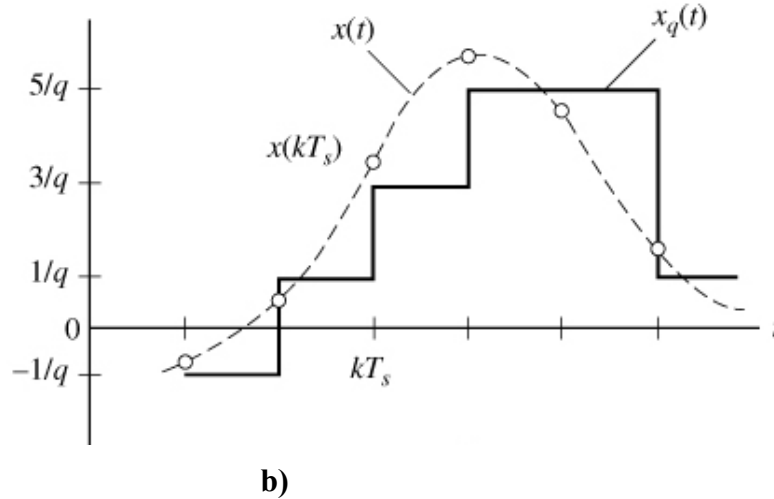
Considerando um sinal analógico $x(t)$ com largura de banda W , a frequência de amostragem mínima utilizada é $f_s=2W$, assim a taxa de geração de dados binários é $r_b=v \cdot f_s$.

4.3 Receptor PCM

O primeiro bloco do receptor PCM é um regenerador que tem por objectivo regenerar o sinal PCM que chega ao receptor. O sinal PCM à entrada do receptor pode estar contaminado por ruído e/ou distorcido. De seguida cada conjunto de v bits que compõem uma palavra são convertidos de série em paralelo e a amplitude correspondente é decodificada. O circuito de *Sample&Hold* gera o sinal $x_q(kT_s)$ em forma de degraus como se mostra na figura, o sinal $x_q(kT_s)$ é uma versão aproximada do sinal $x(t)$ amostrado, trata-se de uma versão aproximada porque as amostras foram quantificadas. O papel do filtro passa baixo à saída do receptor é suavizar $x_q(kT_s)$, no entanto o sinal à saída do filtro passa baixo $y_D(t)$ difere de $x(t)$ na medida em que o sinal quantificado $x_q(kT_s)$ difere do sinal amostrado $x(T_s)$.



a)

**Figura 4.3** Receptor PCM.

4.4 Erro de quantificação

O erro de quantificação do símbolo k , definido pela variável aleatória ε_k , é a diferença entre o sinal amostrado, $x(kT_s)$, e o sinal quantificado $x_q(kT_s)$.

$$\varepsilon_k = x_q(kT_s) - x(kT_s) \quad (4.1)$$

Quando a quantificação é uniforme ou linear, ou seja quando for constante a diferença de amplitudes entre dois níveis consecutivos ($\Delta = \text{const.}$). Se as amplitudes a quantificar tiverem uma distribuição uniforme entre $+1$ e -1 V, a distribuição de ε_k é também uniforme entre $-\frac{\Delta}{2}$ e $\frac{\Delta}{2}$, isto é:

$$f(\varepsilon_k) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{para } -\frac{\Delta}{2} \leq \varepsilon_k \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases} \quad (4.2)$$

$f(\varepsilon_k)$ função densidade probabilidade de ε_k .

$$\text{A potência do ruído de quantificação } \sigma_q^2 = \overline{\varepsilon_k^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon_k) \varepsilon_k^2 d\varepsilon_k = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{\varepsilon_k^2}{\Delta} d\varepsilon_k = \frac{\Delta^2}{12}$$

Este resultado indica que a potência de ruído aumenta quando o espaçamento entre níveis aumenta, o que intuitivamente já era esperado.

Uma medida da influência do erro de quantificação no desempenho de um sistema PCM é a relação entre a potência do sinal e a potência do ruído de quantificação (RSR – Relação Sinal Ruído)

$$RSR = \frac{S_x}{\sigma_q^2} \quad (4.3)$$

Considerando a normalização $|x(t)| \leq 1$, temos então que $S_x \leq 1$, e

$$\begin{aligned} RSR &= 10 \log_{10}(S_x 3q^2) \\ &= 10 \log_{10}(S_x 3 \times 2^{2v^2}) \\ &\leq 4.8 + 6.0v \text{ dB} \end{aligned} \quad (4.4)$$

A expressão indica que a relação sinal ruído é proporcional ao nº de bits utilizado para codificar cada amostra

4.5 Quantificação não uniforme

Muitos sinais analógicos (especialmente voz, música e video) apresentam uma gama dinâmica apreciável e a distribuição de amplitudes está longe de ser uniforme, têm média nula e as suas amplitudes tomam com maior probabilidade valores próximos do valor médio como ilustrado na figura.

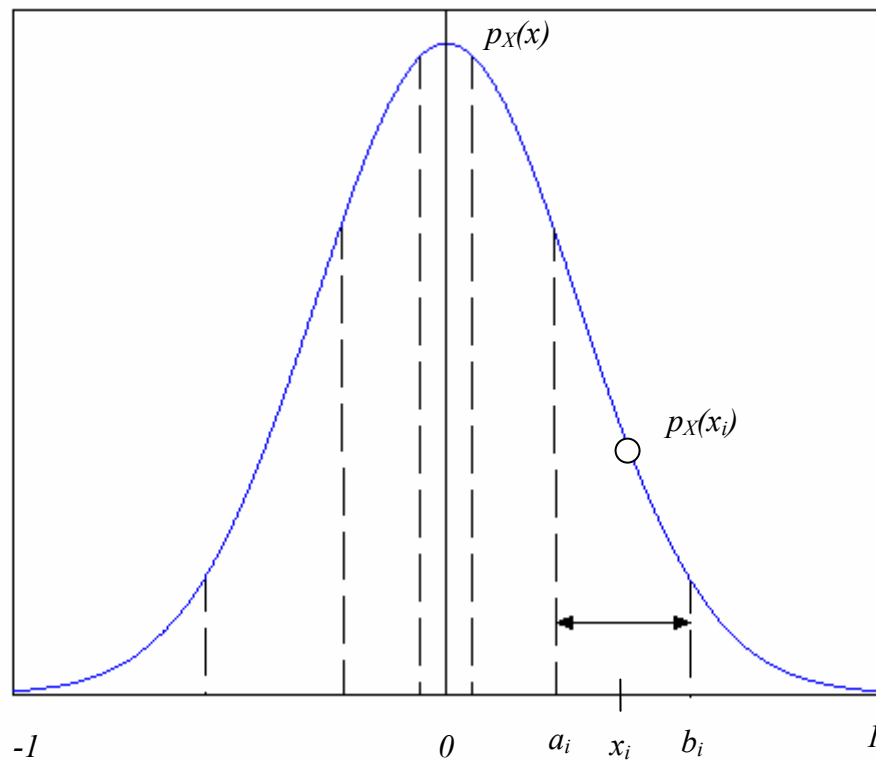


Figura 4.4 Função densidade probabilidade de um sinal mensagem $x(t)$, com níveis de quantificação não uniformes.

A potência do sinal mensagem S_x é calculada

$$S_x = \int_{-1}^1 x^2 p_X(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 p_X(x) dx \quad (4.5)$$

Como $p_X(x)$ apresenta um pico dominante em valores próximos de $x=0$ então $S_x \ll 1$.

A forma de $p_X(x)$ também significa que $|x(t)| \ll 1$ a maior parte do tempo. Assim, faz todo o sentido ter intervalos de quantificação não uniformes, intervalos de quantificação mais largos para amostras que ocorrem em intervalos de menor probabilidade e intervalos de menor comprimento no caso contrário.

O ruído de quantificação calcula-se do seguinte modo.

Considera-se que o valor amostrado $x_a = x(kT_s)$ no intervalo $\Delta_i = b_i - a_i$, cujo nível de quantificação é x_i . O erro de quantificação é então:

$$\varepsilon_i = x_i - x_a \quad (4.6)$$

A potência do erro de quantificação no intervalo $a_i < x < b_i$, é então:

$$\overline{\varepsilon_i^2} = \int_{a_i}^{b_i} (x_i - x_a)^2 p_X(x) dx \quad (4.7)$$

O ruído total de quantificação é a soma dos ruídos de cada intervalo

$$\sigma_q^2 = 2 \sum_{i=1}^{q/2} \overline{\varepsilon_i^2} \quad (4.8)$$

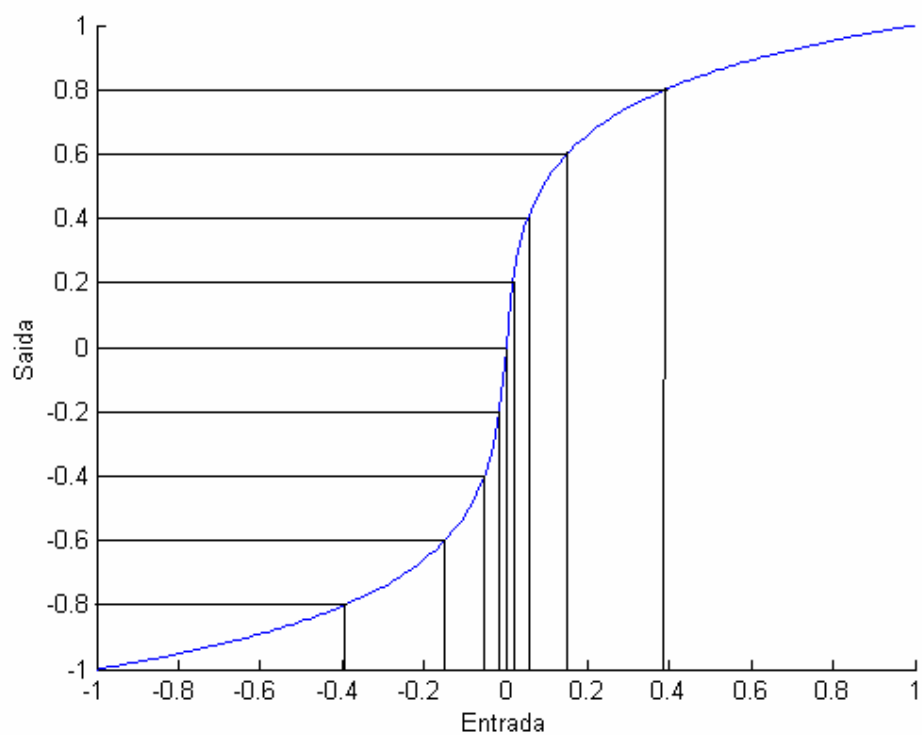
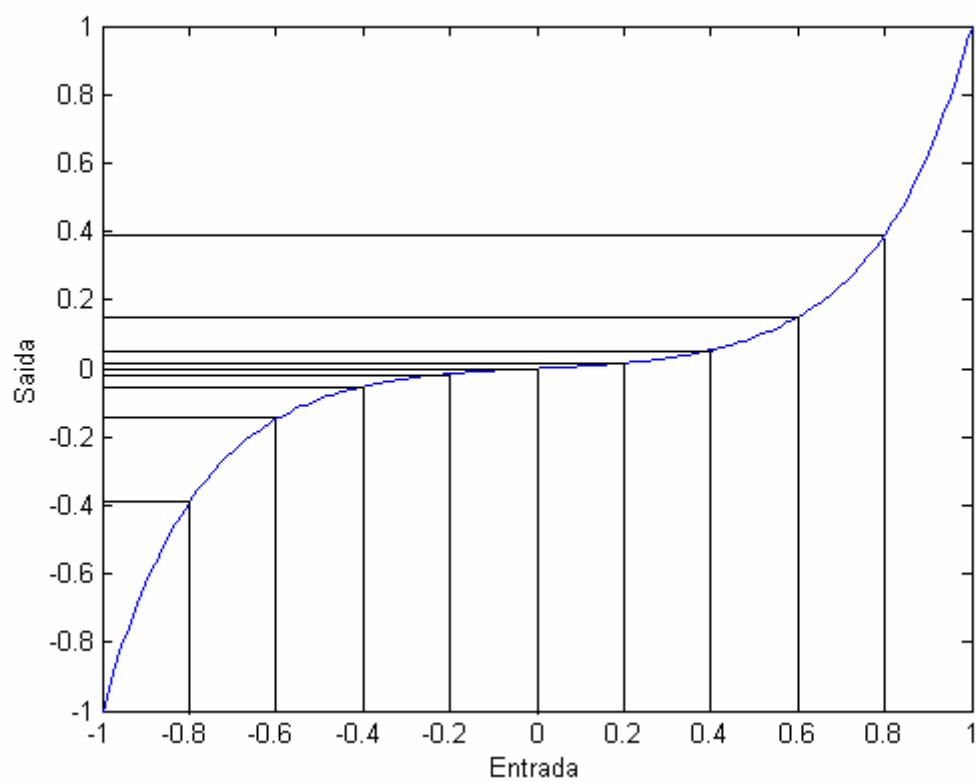
Normalmente $q \gg 1$ e o intervalo de quantificação $\Delta_i = b_i - a_i$ é tão pequeno que $p_X(x) \approx p_X(x_i)$, no intervalo de integração e x_i localiza-se grosseiramente a meio do intervalo. Nestas condições

$$\overline{\varepsilon_i^2} \approx p_X(x_i) \int_{x_i - \Delta_i/2}^{x_i + \Delta_i/2} (x_i - x)^2 dx = p_X(x_i) \frac{\Delta_i^3}{12} \quad (4.9)$$

e

$$\sigma_q^2 \approx \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{q/2} p_X(x_i) \Delta_i^3 \quad (4.10)$$

Teoricamente poderíamos otimizar o desempenho de um sistema PCM encontrando os valores de x_i , a_i e b_i que minimizem o ruído de quantificação. Tal abordagem é possível, mas exige na prática que para determinado sinal com determinada função densidade probabilidade seja implementado em hardware um quantificador específico. Na prática é utilizada quantificação uniforme depois de o sinal ser submetido a uma operação de não-linear de compressão. As curvas características de compressão estão standardizadas e foram obtidas através de estudos experimentais realizados com sinais representativos.

**Figura 4.5** Compressor.**Figura 4.6** Expandor

Na prática são frequentes dois tipos de curvas de compressão:

- A curva de compressão μ , adoptada nos Estados Unidos, Canadá e no Japão:

$$y = \frac{\log(1 + \mu x)}{\log(1 + x)} \quad (4.11)$$

Com $\mu=255$

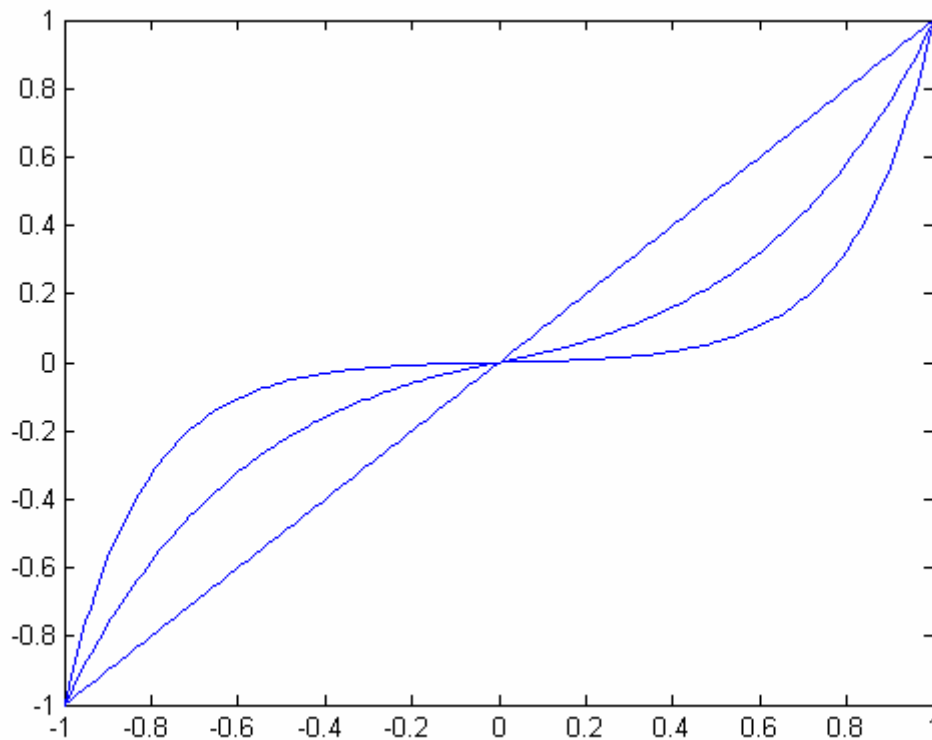


Figura 4.7 Lei de compressão μ .

- A curva A, utilizada na Europa:

$$y = \frac{ax}{1 + \log(a)} \text{ para } 0 \leq |x| \leq 1/a \quad (4.12)$$

$$y = \text{sign}(x) \frac{1 + \log(a|x|)}{1 + \log(a)} \text{ para } 1/a < |x| \leq 1$$

Com $a=87.6$

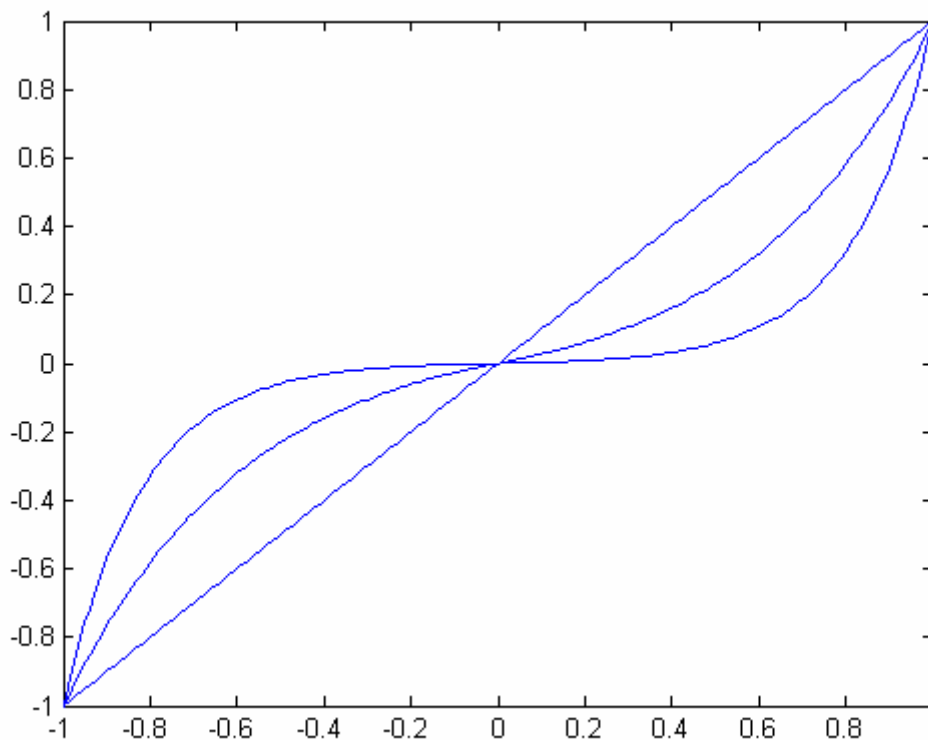


Figura 4.8 Lei de compressão A.

4.6 Modulação diferencial por código de pulso

DPCM – Differential Pulse Code Modulation

Como se viu anteriormente uma desvantagem da modulação PCM é a largura de banda necessária para transmitir o sinal PCM, que é directamente proporcional ao número de bits por palavra. Um método de conversão analógico-digital alternativo é a modulação diferencial por código de pulso. A abaixo apresenta o esquema de um modulador DPCM, como se ilustra na figura este modulador compara o sinal amostrado com o sinal amostrado no instante de amostragem anterior e é a diferença entre os dois sinais que é quantificada, codificada e transmitida utilizando-se v bits por amostra.

Como a gama de amplitudes do sinal diferença entre amostras consecutivas é menor que a gama de amplitudes do sinal analógico $x(t)$, é necessário um número menor de bits para codificar o sinal diferença mantendo-se o mesmo erro de quantificação que a modulação PCM.

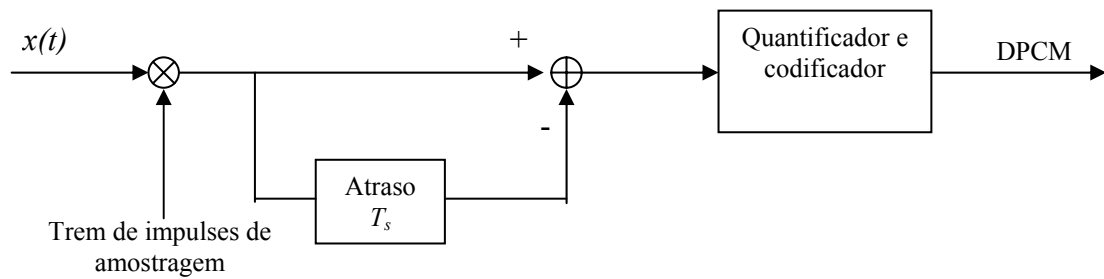


Figura 4.9 Modulador or DPCM

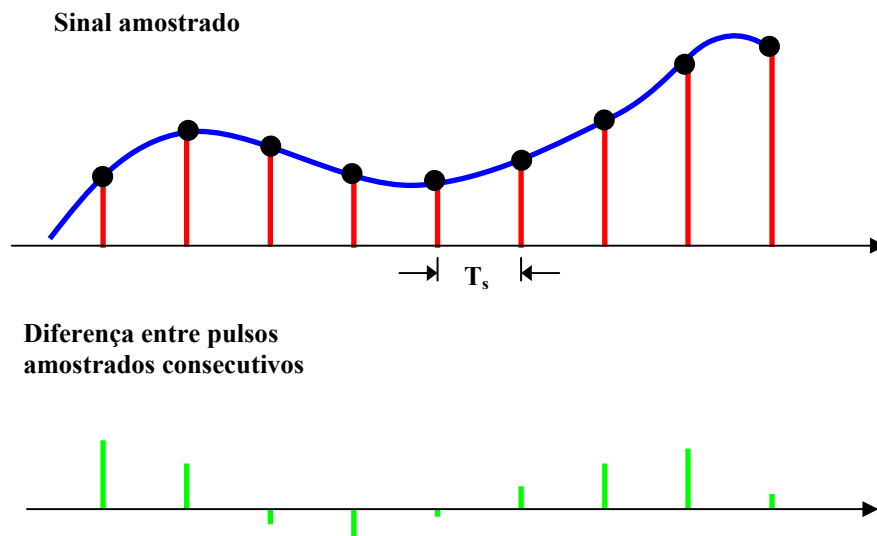


Figura 4.10 Operação do gerador DPCM.

4.7 Modulação Delta

A modulação Delta é um caso limite da modulação DPCM, a diferença entre o sinal amostrado no instante anterior é codificado utilizando-se só um nível. Este tipo de modulador é essencialmente utilizado para a voz humana e sinais de vídeo, e o sua grande vantagem é a sua simplicidade de implementação.

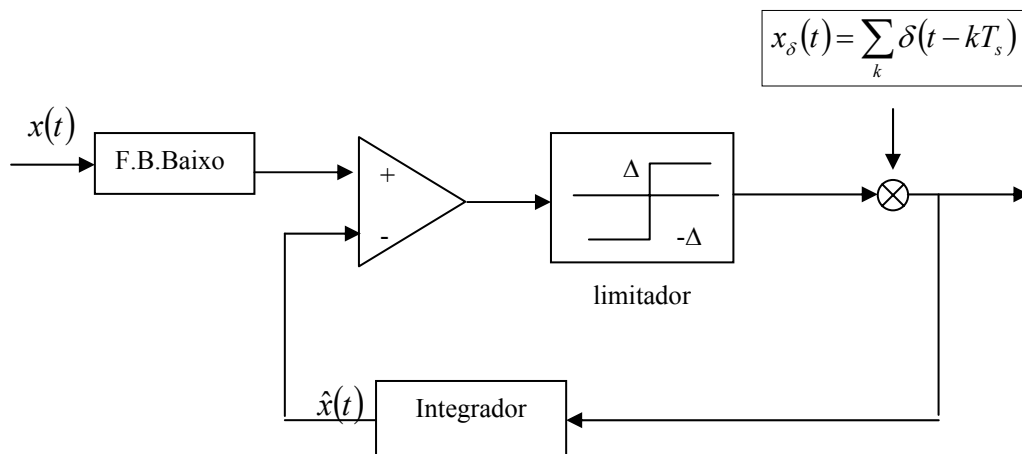


Figura 4.11 Modulador Delta.

O modulador Delta representado na figura compara o sinal $x(t)$ com uma aproximação em degrau $\hat{x}(t)$ e a diferença $x(t) - \hat{x}(t)$ é quantificada em dois níveis $\pm \Delta$ dependendo do sinal da diferença como se ilustra na

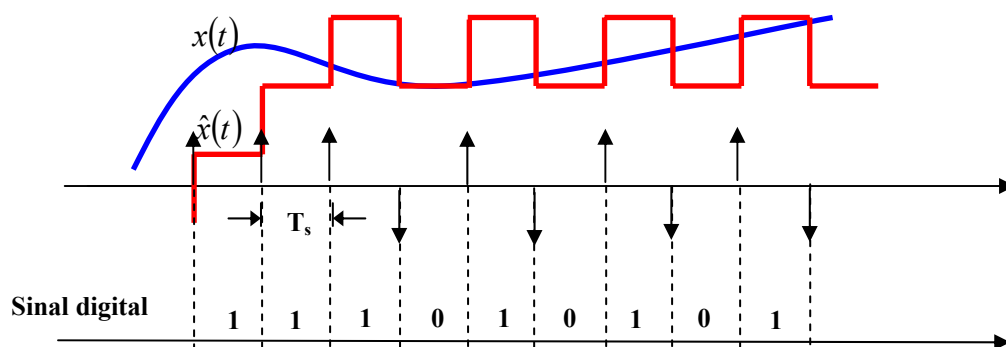


Figura 4.12 Funcionamento do modulador Delta.

Da análise da Figura 4.12 podemos constatar que quando o declive de $x(t)$ aumenta e o sinal $\hat{x}(t)$ não consegue acompanhar $x(t)$ aumentando o ruído de quantificação, nesta situação chamado de ruído de sobrecarga. Este tipo de ruído pode ser minimizado filtrando o sinal $x(t)$ para evitar variações rápidas no tempo, ou aumentando Δ e/ou s

frequência de amostragem do sinal. A filtragem e/ou aumento de Δ resulta num aumento da distorção do sinal, e o aumento da frequência de amostragem implica um aumento da largura de banda necessária para transmitir este sinal. Como $\hat{x}(t)$ varia de $\pm\Delta$ cada T_s segundos, o declive do sinal $\hat{x}(t)$ é $\pm f_s \Delta$, pelo que para que não ocorra ruído de sobrecarga é necessário verificar-se a condição:

$$\left| \frac{dx(t)}{dt} \right|_{\max} \leq f_s \Delta \quad (0.1)$$

Por outro lado quando o sinal $x(t)$ não sofre grandes variações, o ruído, designado por ruído de quantificação ou ruído granular, é semelhante ao ruído PCM, podendo ser reduzido diminuindo o valor de Δ . Uma solução para diminuir quer o ruído granular como o ruído de sobrecarga é detectar a condição de sobrecarga e aumentar Δ quando se detecta a sobrecarga. Moduladores que adaptam o valor de Δ ao declive do sinal, são chamados sistemas de modulação delta adaptativos.

O dimensionamento de Δ é pois um factor fundamental no desempenho de moduladores delta, se para valores de Δ pequenos o ruído granular é reduzido trata-se uma situação que pode provocar ruído de sobrecarga, no entanto aumentando o valor de Δ diminui o ruído de sobrecarga, mas à custa de um aumento do ruído de quantificação. Este comportamento encontra-se ilustrado na figura seguinte.

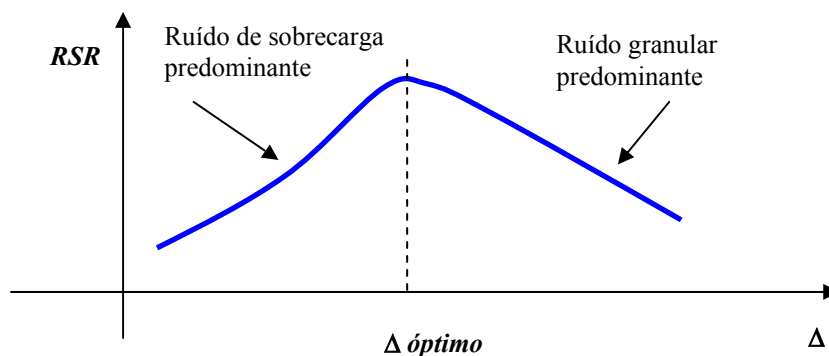


Figura 4.13 Esquema ilustrativo Relação Sinal Ruído (RSR) em função de Δ para sistemas de modulação Delta.

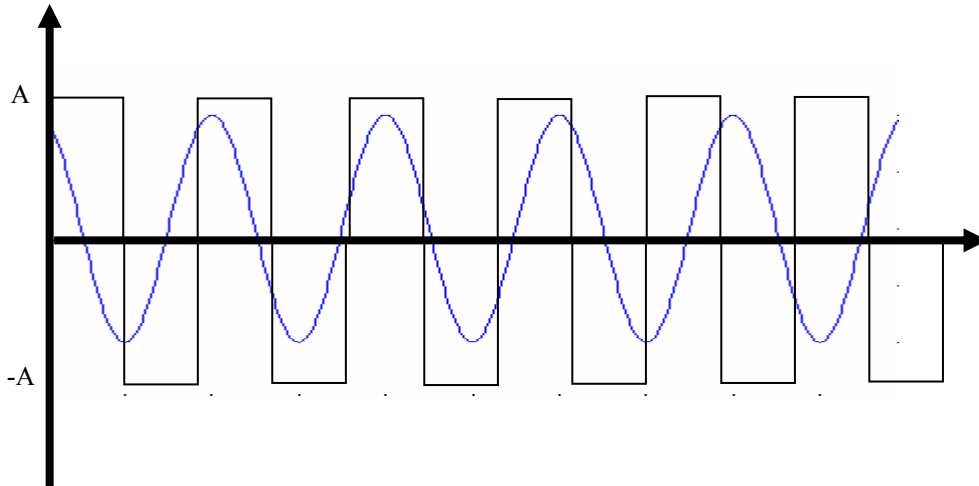
Exemplo 4.1

Considere um sinal mensagem, $s(t)$, sinusoidal com amplitude A e frequência f_0 . Considere que este sinal mensagem é aplicado a um modulador delta.

- Mostre que quando, Δ , o nível de quantificação é maior do que $2A$ o sinal à saída modulador $\hat{s}(t)$ não é uma aproximação válida de $s(t)$.
- Mostre que para evitar ruído de sobrecarga é necessário que $A \leq \frac{\Delta f_s}{2\pi f_0}$, onde f_s é a frequência de amostragem.
- Mostre que a condição $f_s > 3f_0$, satisfaz quer a alínea a) quer a alínea b).

4.7.1 Resolução

- a) Como se ilustra no esquema abaixo, qualquer que seja o instante de amostragem quando $\Delta > 2A$, $\hat{s}(t)$ é sempre uma onda rectangular que não contém informação acerca de $s(t)$.



- b) A condição de sobrecarga ocorre quando entre dois instantes de amostragem consecutivos a função cresce ou decresce de um valor maior do que Δ , ou seja

$$\frac{ds(t)}{dt} < \frac{\Delta}{T_s}, \text{ onde } T_s \text{ é o intervalo de amostragem}$$

$$\frac{d}{dt}(A \sin(2\pi f_0 t)) < \frac{\Delta}{T_s}$$

$$A 2\pi f_0 \cos(2\pi f_0 t) < \frac{\Delta}{T_s}$$

O declive da função atinge o seu valor máximo quando $t=0$.

$$2A\pi f_0 < \frac{\Delta}{T_s}$$

$$A < \frac{\Delta f_s}{2\pi f_0}$$

- c) De modo a satisfazer as duas alíneas anteriores

$$\Delta < 2A \quad \text{e} \quad A < \frac{\Delta f_s}{2\pi f_0}$$

destas duas condições temos que:

$$\Delta < \frac{2\Delta f_s}{2\pi f_0}$$

$$f_s > \pi f_0 > 3f_s$$