

2 Modulação de fase e de frequência

2.1 Conceitos básicos

Dada a portadora sinusoidal, com angulo

$$x_p(t) = A_p \cos(\theta_i(t)) \quad (1)$$

A sua frequência instantânea é obtida por derivação de $\theta_i(t)$, isto é:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt} \quad (2)$$

Quando a frequência da portadora é constante f_p , a fase da portadora é:

$$\theta_i(t) = 2\pi f_p t + \theta_0 \quad (3)$$

onde θ_0 é o valor de $\theta_i(t)$ no instante $t=0$.

Na modulação de fase (PM, Phase Modulation), $\theta_i(t)$ varia linearmente com o sinal mensagem $x(t)$:

$$\theta_i(t) = 2\pi f_p t + \theta_0 + K_1 x(t) \quad (4)$$

Temos então o sinal PM, considerando $\theta_0 = 0$:

$$x_p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t + K_1 x(t)) \quad (5)$$

Na modulação de frequência (FM, Frequency Modulation), a frequência instantânea varia linearmente com $x(t)$, obtendo-se:

$$\omega_i(t) = 2\pi f_i(t) = 2\pi f_p + 2\pi K_f x(t) \quad (6)$$

Tem-se então que:

$$\theta_i(t) = \int_{t_0}^t \omega_i(t) dt = 2\pi f_p t + \theta_0 + \int_{t_0}^t K_2 x(t) dt \quad (7)$$

E o sinal FM:

$$x_p(t) = A_p \cos\left(2\pi f_p t + 2\pi K_f \int_{t_0}^t x(t) dt\right) \quad (8)$$

2.1.1 Relação entre PM e FM

A figura abaixo compara sinais PM e FM, quando o sinal mensagem é uma senoide.

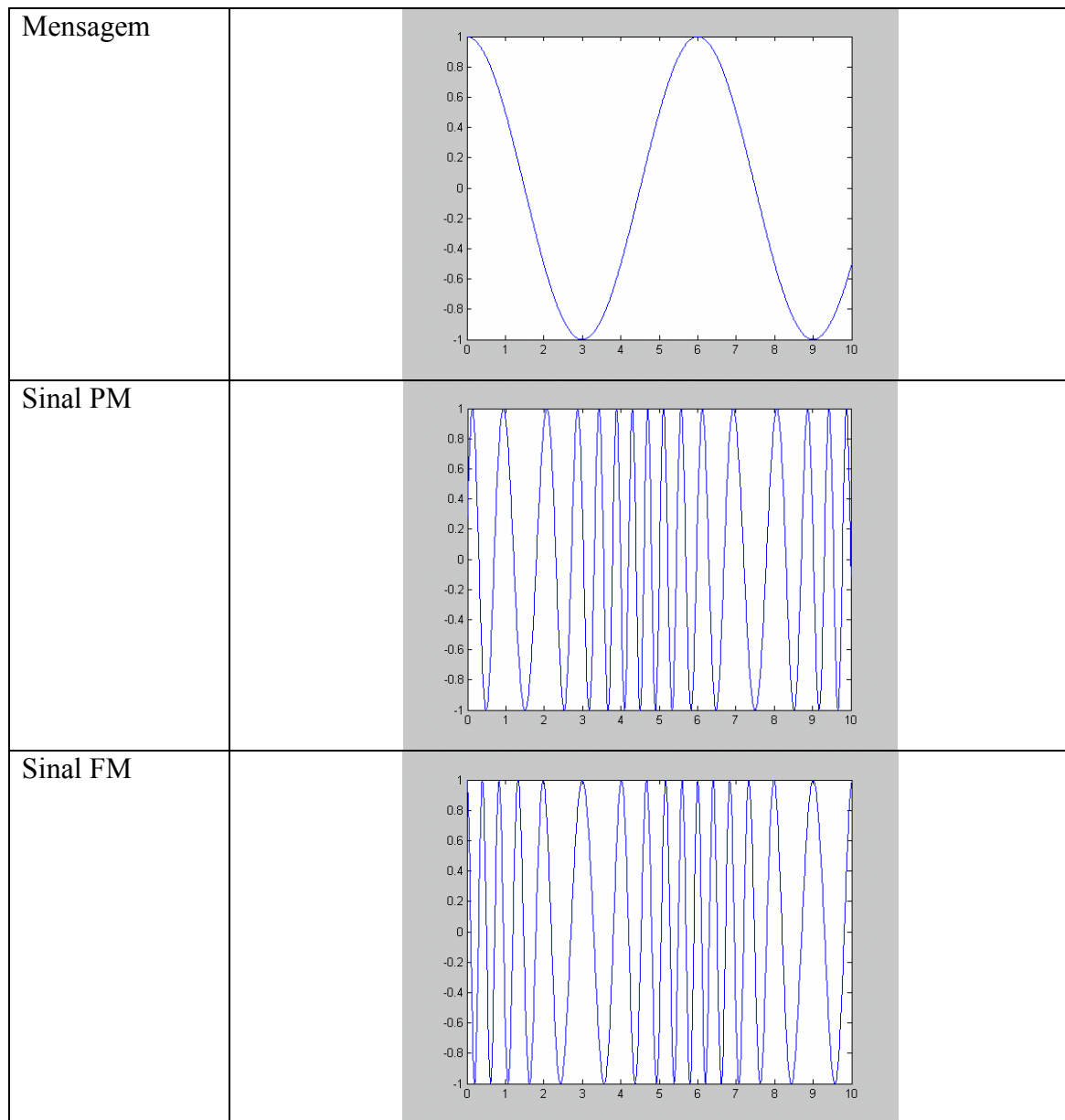


Figura 2.1 Comparação de sinal PM com sinal FM.

Apesar de muito semelhantes a modulação FM apresenta em relação à modulação PM características de desempenho superiores na presença de ruído e será portanto analisada em pormenor.

2.2 Análise espectral de sinais FM

Considere o sinal mensagem, $x(t)$:

$$x(t) = A_m \cos(2\pi f_m t) \quad (9)$$

A frequência instantânea do sinal FM correspondente é:

$$\begin{aligned} f_i(t) &= f_p + K_f A_m \cos(2\pi f_m t) \\ &= f_p + \Delta f \cos(2\pi f_m t) \end{aligned} \quad (10)$$

onde

$$\Delta f = K_f A_m \quad (11)$$

Δf é o desvio de frequência, que representa o desvio máximo de frequência ao redor da portadora f_p . A característica fundamental de um sinal FM é que o desvio de frequência Δf é proporcional à amplitude do sinal mensagem e independente da sua frequência. O ângulo do sinal FM

$$\theta_i(t) = 2\pi f_p t + \frac{\Delta f}{f_m} \sin(2\pi f_m t) \quad (12)$$

A razão $\frac{\Delta f}{f_m} = \beta$, é o índice de modulação. β é medido em radianos.

O sinal FM pode então escrever-se do seguinte modo:

$$x_{FM}(t) = A_p \cos[2\pi f_p t + \beta \sin(2\pi f_m t)] \quad (13)$$

A modulação de frequência por se tratar de um processo não linear, não é de fácil análise no domínio da frequência, por se tratar a sua análise quantitativa só é possível em particulares, como quando o sinal mensagem é uma senoide, nesse caso podemos escrever:

$$\begin{aligned} x_{FM}(t) &= \frac{A_p}{2} \exp(2\pi f_p t + \beta \sin(2\pi f_m t)) + \frac{A_p}{2} \exp(-2\pi f_p t - \beta \sin(2\pi f_m t)) \\ &= \underbrace{\frac{A_p}{2} \exp(2\pi f_p t) \exp(\beta \sin(2\pi f_m t))}_{\text{Termo associado com as componentes positivas de frequência}} + \underbrace{\frac{A_p}{2} \exp(-2\pi f_p t) \exp(-\beta \sin(2\pi f_m t))}_{\text{Termo associado com as componentes positivas de frequência}} \end{aligned} \quad (14)$$

Concentrando-se só com os termos associados à frequência positiva

$$\exp(j\beta \sin(2\pi f_m t)) \quad (15)$$

Verificamos que é um sinal periódico com período $1/f_m$ e portanto em princípio pode ser representado por uma série de Fourier

$$\exp(j\beta \sin(2\pi f_m t)) = \sum_n c_n \exp(jn2\pi f_m t) \quad (16)$$

Os coeficientes c_n correspondem às funções de Bessel

$$c_n = J_n(\beta) \quad (17)$$

As funções de Bessel foram estudadas por Bessel (1784-1846) no âmbito dos seus estudos sobre o movimento dos planetas, são funções que se encontram calculadas para diferentes valores de n (ordem da função) e β (argumento da função).

Deste modo o sinal FM pode ser escrito como:

$$x_{FM}(t) = A_p \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_p + nf_m)t] \quad (18)$$

Cuja transformada de Fourier é:

$$X_{FM}(f) = \frac{A_p}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) [\delta(f - f_p - nf_m) + \delta(f + f_p + nf_m)] \quad (19)$$

que se encontra representada abaixo.

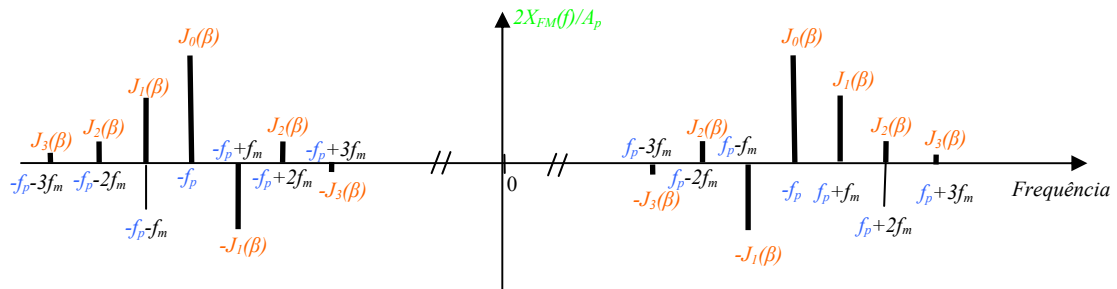


Figura 2.1 Espectro do sinal FM.

O espectro de um sinal FM depende directamente das funções de Bessel. Para entender melhor o comportamento das funções de Bessel iremos analisar o seu comportamento e as suas propriedades mais relevantes:

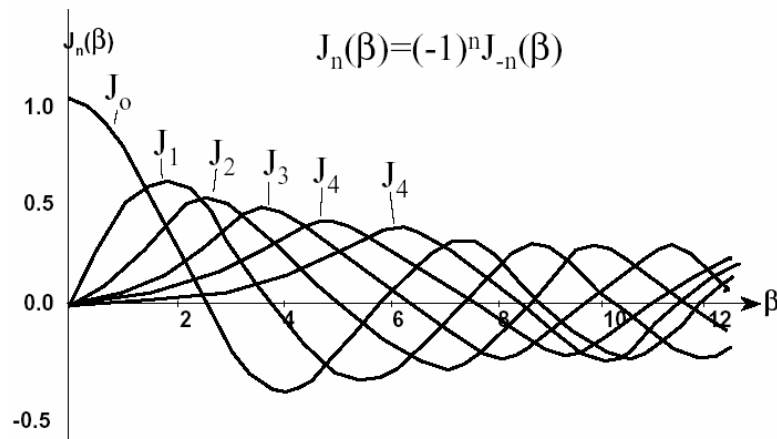


Figura 2.2 Funções de Bessel.

Algumas propriedades das funções de Bessel:

Se $\beta \ll 1$

$$J_0(\beta) \cong 1$$

$$J_1(\beta) \cong \frac{\beta}{2}$$

$$J_n(\beta) \cong 0 \quad n \geq 2$$

2.3 Largura de banda necessária para a transmissão de sinais FM

Teoricamente, um sinal FM contém um número infinito de riscas espectrais, por isso a largura de banda necessária para a sua transmissão é infinita. No entanto, na prática a potência do sinal está concentrada num número finito de riscas, vejamos alguns exemplos:

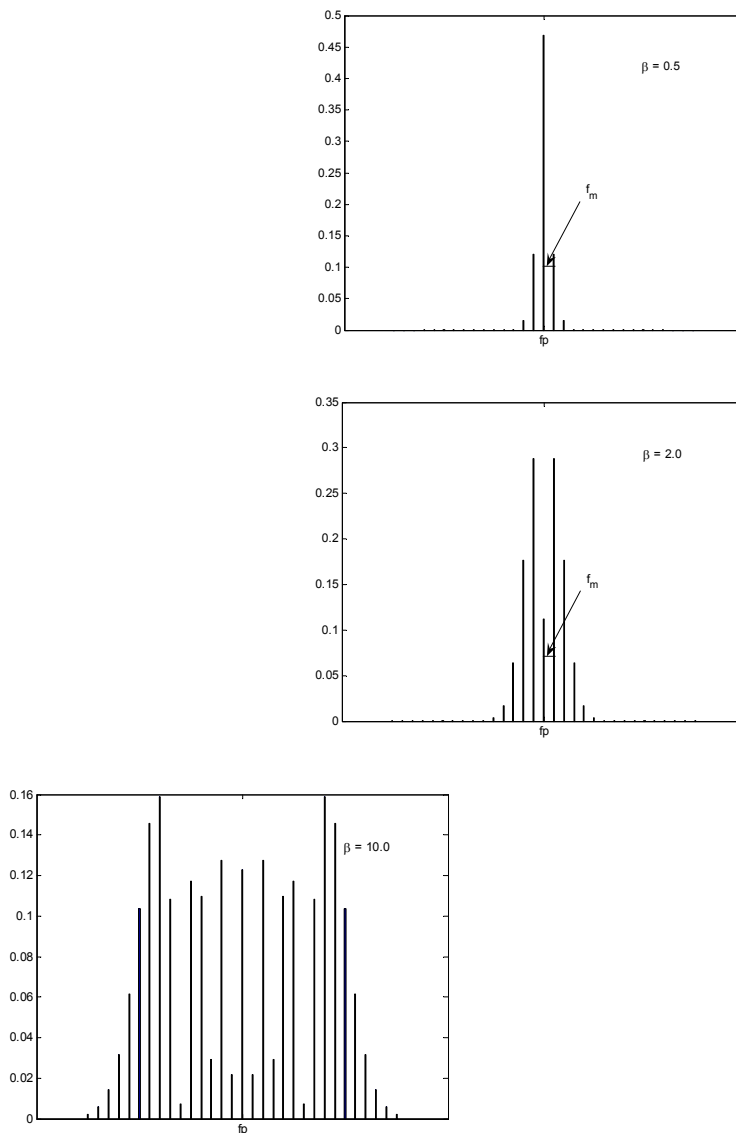


Figura 2.3 Espectro do sinal FM com f_m constante e β variável, as riscas não representadas tem reduzida amplitude. Só está representado na figura o eixo positivo das frequências.

Como $\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$, tendo em conta que f_m é constante para todos os casos representados na figura, β elevado corresponde a um desvio máximo de frequência Δf , elevado e a uma largura de banda elevada.

Uma regra empírica, conhecida por regra de Carson:

$$B_T = 2\Delta f + 2f_m = 2\Delta f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = 2f_m (1 + \beta) \quad (20)$$

Significa que o número de riscas a considerar é de $\beta+1$ para cada lado da portadora.

Critério da potência:

Considera-se um número de riscas N tal que a potência contida nestas riscas seja 98% do total da potência do sinal.

$$\text{Basta calcular } N \text{ para que } \sum_{n=-N}^N J_n^2(\beta) \geq 0.98$$

$$\text{dado que } \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$$

Critério apresentado no livro de Haykin:

É baseado na amplitude das riscas. Segundo este critério o número de riscas a transmitir é calculado de forma que todas as riscas excluídas tenham amplitude inferior a 1% da amplitude da risca da portadora quando não modulada. Este critério é mais pessimista que a regra de Carson

No caso geral, com um sinal modulador arbitrário não existe solução teórica para o caso geral. Costuma usar-se uma aproximação que consiste em usar para o cálculo da largura de banda um sinal sinusoidal com frequência igual à frequência máxima do sinal modulador W . Assim calcula-se o parâmetro $\beta = \Delta f/W$, em que Δf é o desvio de frequência máximo pretendido.

Exemplo: FM comercial

$$W = 15\text{kHz}$$

$$BT = 2(75+15) = 180\text{kHz (Carson)}$$

$$BT = 3,2 \times 75\text{kHz} = 240\text{ kHz (Haykin)}$$

Na prática utiliza-se, com bons resultados, a banda para cada estação de 200 kHz.

Em TV o som é FM com $\Delta f = 50\text{kHz}$

2.4 FM de banda estreita

O sinal FM pode ser escrito como:

$$x_{FM}(t) = A_p \cos[2\pi f_p t + \beta \sin(2\pi f_m t)] \quad (2.21)$$

Com base no valor de β , são normalmente definidos dois tipos de modulação FM

- FM de banda-estreita, se β for pequeno ~ 1 rad;
- FM de banda-larga, para valores elevados de β (superiores a 1 rad).

Utilizando a relação trigonométrica

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad (2.22)$$

A equação (2.21) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$x_{FM}(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) \cos[\beta \sin(2\pi f_m t)] - A_p \sin(2\pi f_p t) \sin[\beta \sin(2\pi f_m t)] \quad (2.23)$$

Considerando β muito pequeno (~ 1 rad) podemos efectuar as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} \cos[\beta \sin(2\pi f_m t)] &\cong 1 \\ \sin[\beta \sin(2\pi f_m t)] &\cong \beta \sin(2\pi f_m t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Com estas simplificações a equação (2.23) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$x_{NFM}(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) - \beta A_p \sin(2\pi f_p t) \sin(2\pi f_m t) \quad (2.25)$$

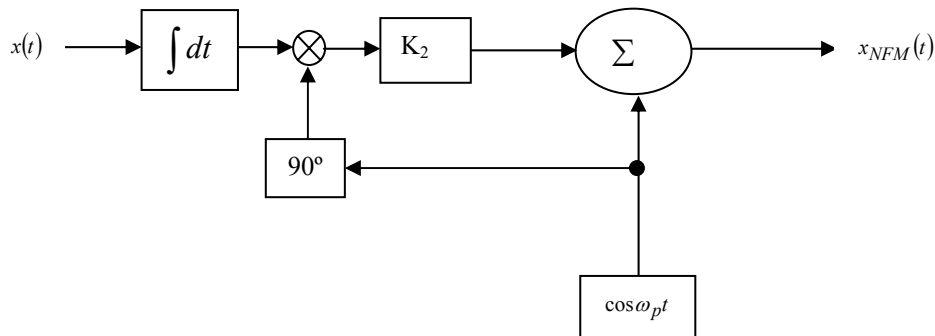


Figura 2.4 Emissor FM de banda estreita.

$$x_{NFM}(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) - \frac{1}{2} \beta A_p [\cos(2\pi(f_p - f_m)t) - \cos(2\pi(f_p + f_m)t)] \quad (2.26)$$

Foi utilizada a igualdade trigonométrica

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

A transformada de Fourier de $x_{NFM}(t)$ é dada por

$$X_{NFM}(f) = \frac{A_p}{2} [\delta(f - f_p) + \delta(f - f_p)] + \frac{1}{4} \beta A_p [-\delta(f - f_p + f_m) - \delta(f + f_p - f_m) + \delta(f - f_p - f_m) + \delta(f + f_p + f_m)]$$

Largura de banda necessária para transmitir o sinal FM de banda estreita $B_T = 2f_m$

Falta representar o gráfico... fazer como exercício.

O emissor de FM de banda estreita representado na figura, é muito semelhante a um emissor AM, no entanto esta implementação só é válida para sinais FM com β muito pequeno (<0.2 na teoria, 0.5 na prática). Um método utilizado para gerar FM de banda larga é 1º gerar um sinal FM de banda estreita e de seguida utilizar um multiplicador de frequência.

Um multiplicador de frequência é um dispositivo não linear desenhado de modo a multiplicar a frequência do sinal de entrada por um determinado factor. Por exemplo a característica entrada-saída de um dispositivo de lei quadrática é:

$$x_o(t) = ax_e^2(t) \quad (2.27)$$

Se o sinal de entrada for o sinal FM

$$x_e(t) = A_p \cos(\omega_p t + \beta \sin \omega_m t)$$

A saída do dispositivo de lei quadrática

$$x_o(t) = aA_p^2 \cos^2(\omega_p t + \beta \sin \omega_m t) = \frac{1}{2} aA_p^2 [1 + \cos(2\omega_p t + 2\beta \sin \omega_m t)] \quad (2.28)$$

O primeiro termo é uma componente DC que pode ser facilmente eliminada por um filtro, a segunda componente é um sinal FM com frequência de portadora o dobro da do sinal FM de entrada e índice de modulação também o dobro do índice de modulação do sinal de entrada. De modo análogo podemos concluir que depois de um sinal FM de banda estreita passar por n dispositivos de lei quadrática, obtemos um sinal FM com frequência de portadora nf_p e índice de modulação $n\beta$. Os multiplicadores de frequência ao mesmo tempo que aumentam o índice de modulação também aumentam a frequência da portadora, como consequência pode acontecer que para que se consiga um determinado (elevado) índice de modulação se obtenha uma frequência de portadora extremamente elevada e fora da gama de frequências pretendida, para evitar este problema utiliza-se conversores de frequência, que têm por função transladar a frequência mas mantendo intacto o índice de modulação. Este método de geração de sinais FM é o chamado método indirecto que se encontra representado na figura abaixo.

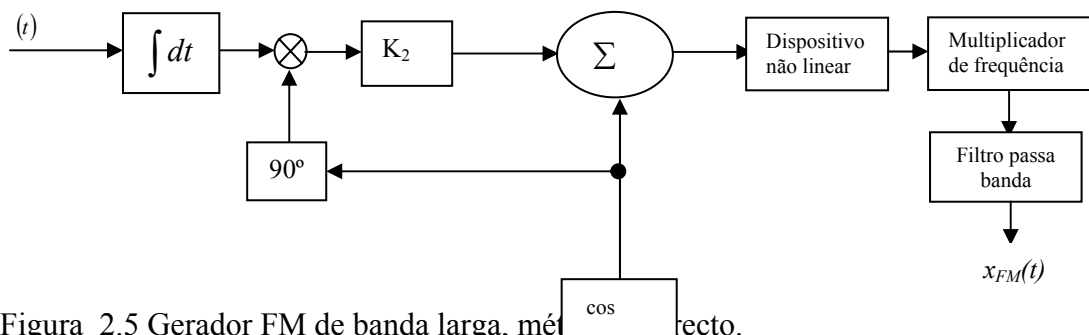


Figura 2.5 Gerador FM de banda larga, método indirecto.

Método Directo

No método directo utiliza-se um dispositivo cuja frequência varie linearmente com a amplitude do sinal aplicado como é o caso do (VCO-Voltage controlled oscillator). Neste caso é necessário um controle preciso da frequência do oscilador. Esta necessidade de controlo preciso de frequência do oscilador é um dos inconvenientes deste tipo de modulador. Contudo, o FM directo apresenta a vantagem de não ser necessário um factor de multiplicação elevado como acontece no FM indirecto, nem necessita de conversão de frequência.

2.5 Desmodulação de sinais FM

A desmodulação de um sinal FM requer um dispositivo que produza um sinal cuja amplitude seja uma função linear da frequência instantânea do sinal de entrada. Esta função pode ser realizada utilizando a resposta em frequência de um circuitos que apresente uma resposta linear na gama de frequências de interesse, como se mostra na figura abaixo.

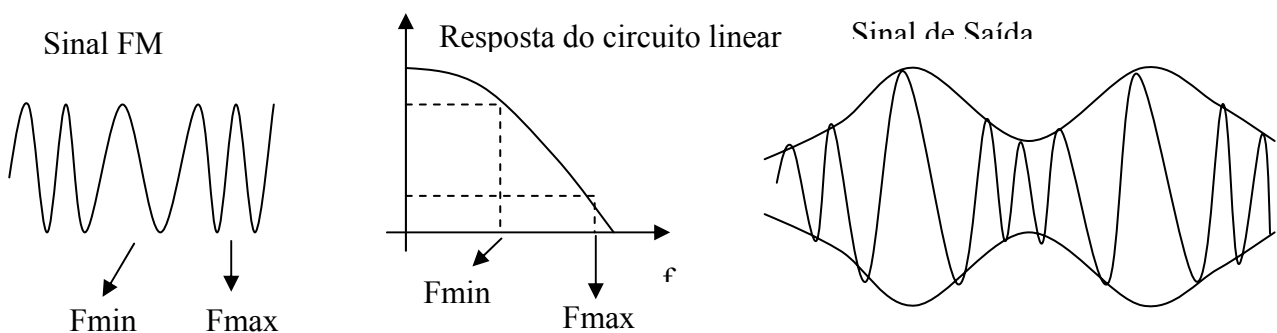


Figura 2.6 Esquema ilustrativo do funcionamento do desmodulador FM.

Como se pode ver na figura variações de frequência à entrada do circuito são transformadas em variações de amplitude à saída do circuito. O circuito que realiza desmodulação de frequência (também conhecido por discriminador), muitas vezes também é sensível a variações de amplitude do sinal de entrada. Como o sinal à entrada do desmodulador varia não só em frequência como também em amplitude (considere por exemplo as oscilações de amplitude introduzidas pelo ruído aditivo) e como o discriminador é normalmente também sensível a variações de amplitude normalmente é utilizado um andar limitador antes do discriminador de modo a reduzir as variações de amplitude.

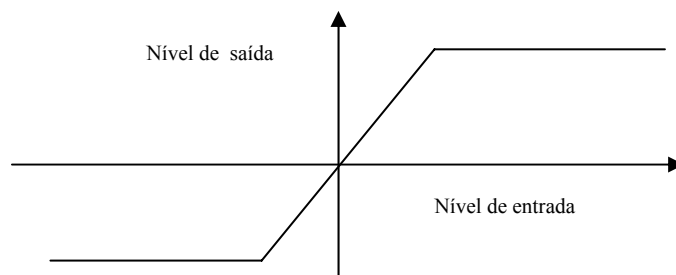


Figura 2.7 Resposta do discriminador incluindo um andar limitador.

A característica ideal de circuito desmodulador é uma linha recta., na prática circuitos com uma função característica como se mostra na Figura 2.7 são suficientes. O intervalo utilizável é o que apresenta características lineares.

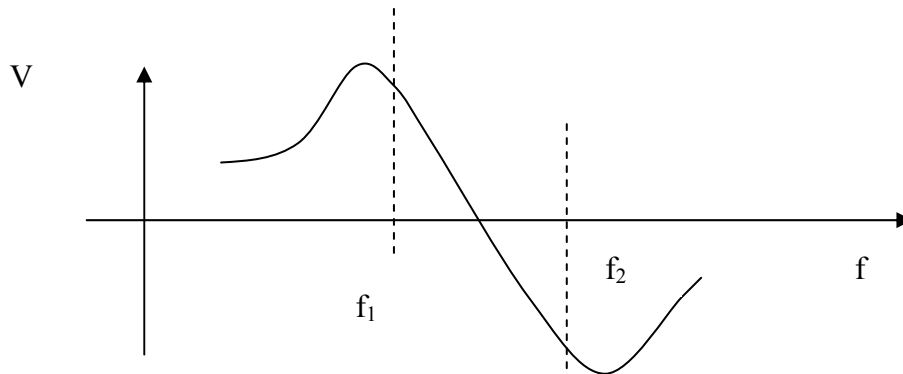


Figura 2.8 Curva característica de um desmodulador FM.

2.6 Ruído em Sistemas FM

Pags: 72 a 74 do livro

Telecommunication Principles de J.J O'Reilly Editora Chapman

2.7 Multiplexagem no domínio da frequência

Pags: 74 a 75 do livro

Telecommunication Principles de J.J O'Reilly Editora Chapman

2.8 Princípios de recepção rádio

Pags: 78 a 83 do livro

Telecommunication Principles de J.J O'Reilly Editora Chapman