

1 Modulação analógica da amplitude de portadora sinusoidal

1.1 Introdução

Nos sistemas de comunicação os sinais mensagem são transmitidos de um ponto para outro através de um canal de transmissão. O canal de transmissão pode ser uma linha de transmissão (como uma linha telefônica) ou simplesmente pode ser um espaço aberto no qual os sinais são irradiados (como a transmissão por via rádio).

De modo geral os sinais não estão adaptados aos canais de comunicação, i.e. não podem ser transmitidos directamente, há que adaptar os sinais de informação, esta adaptação é feita modulando os sinais.

O processo de modulação envolve basicamente dois sinais, o sinal mensagem $x(t)$, que é geralmente um sinal de banda base, e o sinal de portadora $x_p(t)$ que é geralmente um sinal sinusoidal de alta frequência. A modulação da portadora pelo sinal mensagem consegue-se fazendo variar a amplitude, fase ou frequência da portadora, em correspondência com o sinal mensagem. Este método de modulação é chamado de modulação de onda continua (C-W continuous wave).

Entre outros factores de determinam a utilização de modulação de onda continua salienta-se:

- a) Radiação mais eficiente da energia electromagnética. Para que uma antena radie energia com boa eficiência é necessário que as suas dimensões físicas sejam da ordem do comprimento de onda do sinal a transmitir. O tamanho das antenas depende do comprimento de onda λ ($\lambda = c / f$ 3×10^8 m/s velocidade da luz e f frequência) e da aplicação. No caso dos telefones celulares, o tamanho típico é de $\lambda / 4$. Considerando que queremos transmitir um sinal de banda base com uma largura de banda de 3 KHz (voz), nesse caso o tamanho da antena seria de $\lambda / 4 = 25$ Km, impressionante!.... No entanto se se utilizasse uma portadora de 900 MHz, o tamanho da antena seria só de 8 cm, e já a poderia transportar no bolso. A transmissão eficiente em linha de vista necessita antenas com dimensões físicas de pelo menos 1/10 do comprimento de onda do sinal transmitido. No caso de sinais audio, que têm componentes significativas até 100 Hz, para que essas componentes de frequência fossem transmitidos

eficientemente seriam necessárias antenas com aproximadamente 300 Km¹. No entanto este sinal pode ser transmitido eficientemente por uma antena de aproximadamente de 1 m, se for utilizada a modulação de frequência de uma portadora de 100 MHz.

- b) maior largura de banda disponível. Os sistemas de comunicação são limitados por dois factores, custo e hardware. O desempenho do hardware depende da frequência a que opera, através da modulação pode-se escolher uma gama de frequência de operação favorável. Outra consideração é a largura de banda fracional, que é definida como sendo a razão entre largura de banda absoluta e a frequência central. Os custos de implementação e os problemas de implementatção podem ser minimizados se a largura de banda fracional for 1-10%. Como a largura de banda disponível (largura de banda fracional) é uma certa percentagem da frequência da portadora, quanto maior for a frequência da portadora maior será em valor absoluto o largura de banda disponível.

Banda de frequência	Frequência da portadora	Largura de banda
Ondas longas	100 kHz	2 kHz
Ondas curtas	5 MHz	100 kHz
VHF	100 MHz	2 MHz
Microondas	5 GHz	100 MHz
Ondas milimétricas	100 GHz	2 GHz
Ondas ópticas	5x10 ¹⁴ Hz	10 ¹³ Hz

Tabela 1-1 Banda de frequências e frequências ilustrativas da portadora.

- c) menor ruído e menor interferência. O processo de modulação pode aumentar a relação sinal/ruído do sinal transmitido.
- d) Utilização mais eficiente de um dado canal de transmissão por multiplex na frequência.

¹ $\lambda \approx \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{100} = 300 \times 10^4 \text{ m}$

1.2 Modulação de amplitude de portadora continua

Considere a portadora sinusoidal

$$x_p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) \quad (1.1)$$

onde A_p é a amplitude da portadora e f_p é a frequência da portadora. Para simplificar a exposição e sem afectar os resultados e conclusões da análise optou-se por considerar a fase inicial da portadora zero.

Considera-se o sinal mensagem $x(t)$, como sendo um sinal de largura de banda limitada W e a amplitude do sinal $x(t)$ é normalizada de modo que $|x(t)| \leq 1$. Esta normalização impõe um limite na potência média do sinal

$$S_x = \langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \leq 1 \quad (1.2)$$

Adicionalmente considera-se que $\langle x(t) \rangle = 0$.

Nos sistemas de amplitude modulada (AM) a amplitude da portadora varia de acordo com o sinal modulante $x(t)$:

$$x_{AM}(t) = A_p [1 + \mu x(t)] \cos \omega_p t \quad (1.3)$$

O índice de modulação μ , é uma constante positiva.

No domínio da frequência temos que:

$$X_{AM}(f) = \frac{A_p}{2} \delta(f + f_p) + \frac{A_p}{2} \delta(f - f_p) + \frac{A_p}{2} \mu X(f + f_p) + \frac{A_p}{2} \mu X(f - f_p) \quad (1.4)$$

A Figura 1.1 ilustra gráficamente o processo de modulação de amplitude quer no domínio temporal quer no domínio da frequência. A amplitude da portadora $x_p(t)$ é multiplicada pelo sinal mensagem multiplicado pelo índice de modulação ($\mu x(t)$) adicionado da componente dc 1. Se $0 < \mu \leq 1$, dado que $|x(t)| \leq 1$, garante-se que

$(1 + \mu x(t)) \geq 0$ e consequentemente que a envolvente do sinal AM corresponda a $x(t)$.

Caso $\mu > 1$, a situação anterior não se verifica como se ilustra na Figura 1.2

O primeiro e segundo termos na equação (1.4) correspondem a uma portadora não modulada de frequência f_p , esta portadora não modulada não transporta informação, a potência contida nesta portadora é potência ‘desperdiçada’, na medida que não é utilizada para transmitir informação. No entanto, este tipo de modulação possibilita a recepção não coerente do sinal mensagem, através do uso de um simples detector de envolvente, quando $0 < \mu \leq 1$.

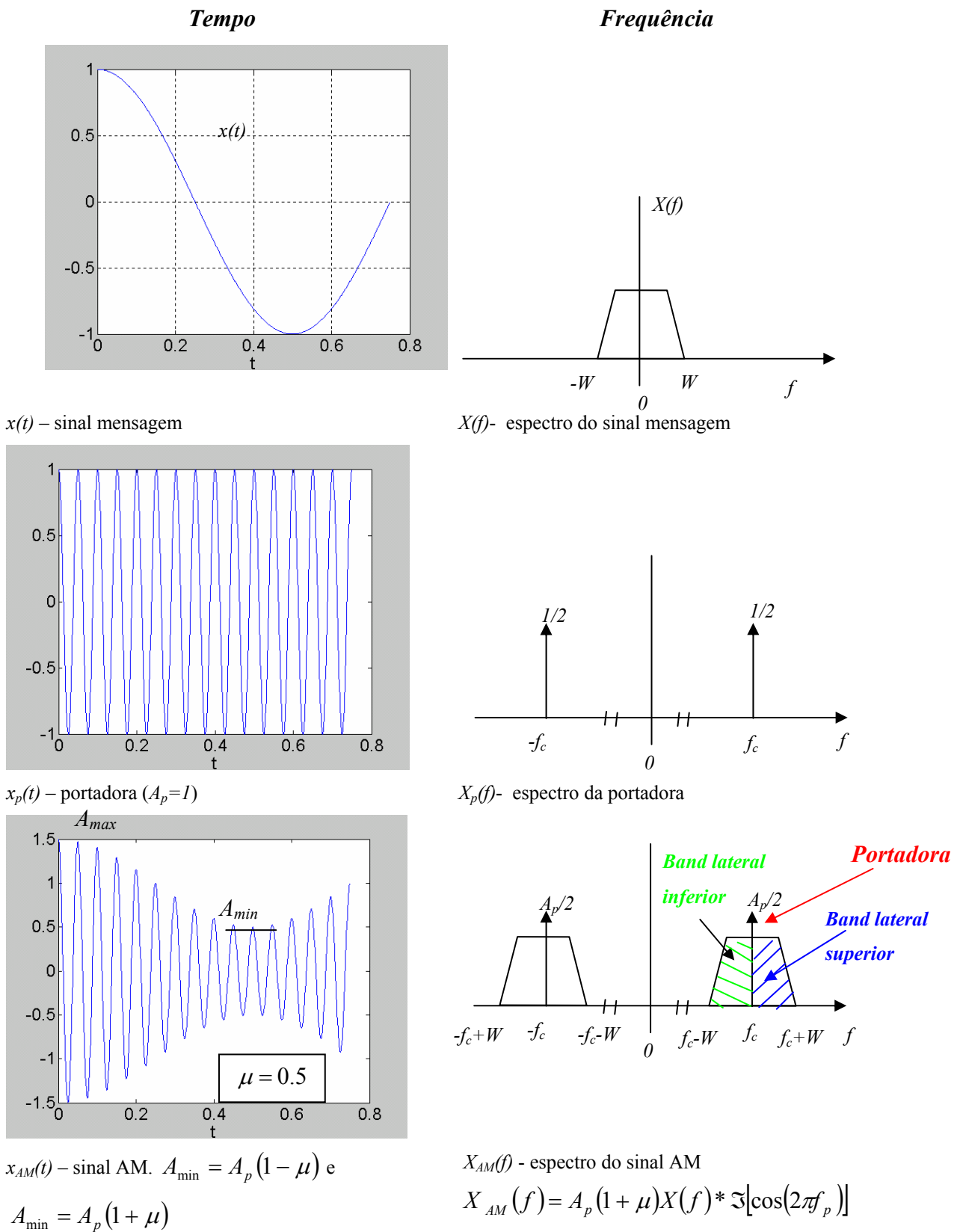


Figura 1.1 Análise gráfica quer no domínio da frequência como no domínio do tempo para $\mu = 0.5$.

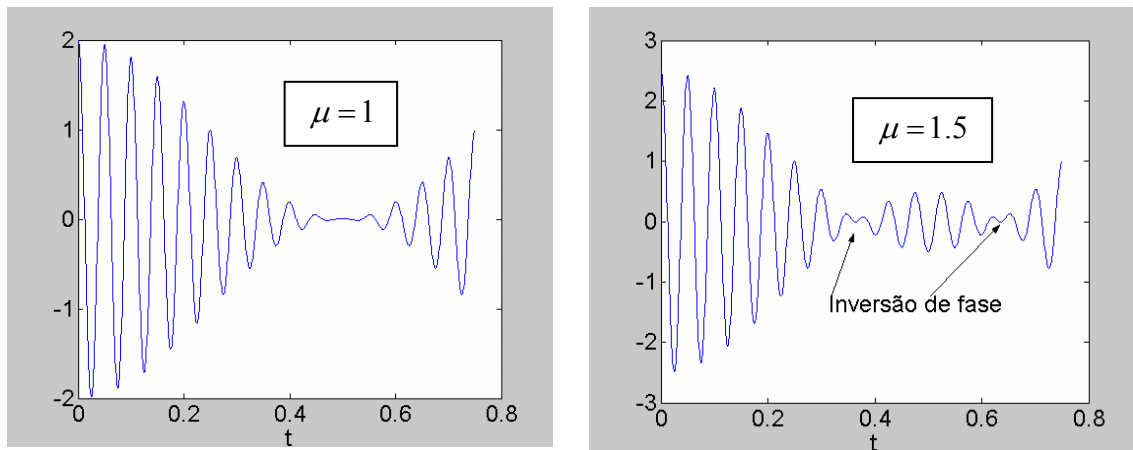


Figura 1.2 Modulação AM com $\mu = 1$ e $\mu = 1.5$.

1.2.1 Largura de banda necessária para transmitir o sinal AM

A largura de banda necessária para transmitir um sinal AM é de $2W$.

1.2.2 Desmodulação do sinal AM

Se $\mu \leq 1$, é possível recuperar o sinal mensagem a partir do sinal AM através de um detector de envoltória como se mostra na figura abaixo

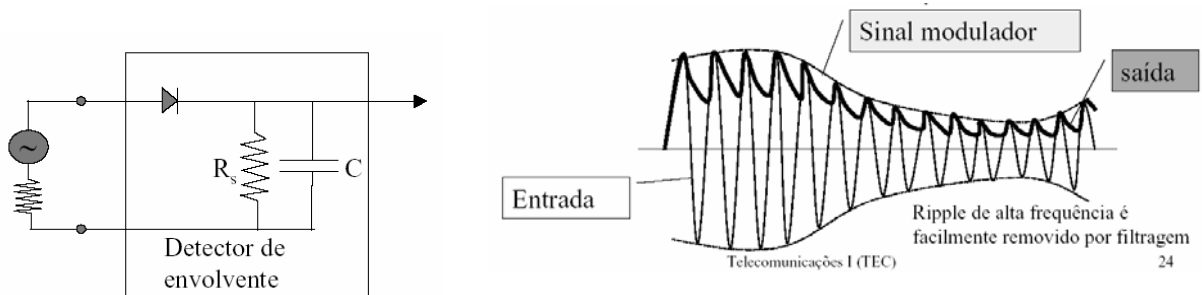


Figura 1.3 Detector de envoltória.

Para que o detector de envoltória funcione apropriadamente deverá ser dimensionado

de modo que $\frac{1}{f_p} < R_s C < \frac{1}{W}$

1.2.3 Potência do sinal AM

A potência média necessária para transmitir o sinal AM é:

$$\begin{aligned}
 S_T = \langle x_{AM}^2(t) \rangle &= \left\langle \left(A_p [1 + \mu x(t)] \cos \omega_p t \right)^2 \right\rangle \\
 &= \left\langle A_p^2 [1 + \mu x(t)]^2 \cos^2 \omega_p t \right\rangle \\
 &= \left\langle A_p^2 (1 + 2\mu x(t) + \mu^2 x^2(t)) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_p t \right) \right\rangle \\
 &= \frac{1}{2} A_p^2 (1 + \mu^2 S_x)
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Para o cálculo da potência do sinal AM considera-se que $\langle x(t) \rangle = 0$ e que a potência do sinal mensagem $x(t)$ é $\langle x^2(t) \rangle = S_x$. O valor médio dos termos que multiplicam por $\cos 2\omega_p t$ é zero.

Para facilitar a análise da distribuição da potência do sinal AM podemos escrever

$$S_T = P_p + 2P_{BL} \tag{1.6}$$

onde

$$P_p = \frac{1}{2} A_p^2 \quad P_{BL} = \frac{1}{4} A_p^2 \mu^2 S_x = \frac{1}{2} \mu^2 S_x P_p \tag{1.7}$$

O termo P_p representa a potência da portadora, que é transmitida mesmo quando não é transmitido nenhum sinal mensagem. A potência transmitida nas bandas laterais, P_{BL} dada a condição de $|\mu x(t)| \leq 1$ faz com que $\mu^2 S_x \leq 1$, e por isso numa situação de

operação normal temos sempre que $P_{BL} \leq \frac{1}{2} P_p$. Na situação limite a potência total transmitida é $S_T = P_p + 2P_{BL} = P_p + 2 \frac{P_p}{2} = 2P_p$, sendo a potência das bandas laterais

$2P_{BL} = \frac{1}{2} S_T$, no máximo metade da potência total do sinal AM. A potência *desperdiçada* na portadora é sempre \geq que a potência total do sinal.

1.2.4 Caso particular da modulação AM

No caso particular de $x(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$, temos que:

$$x_{AM}(t) = (A_p + x(t)) \cos(2\pi f_p t) \quad (1.8)$$

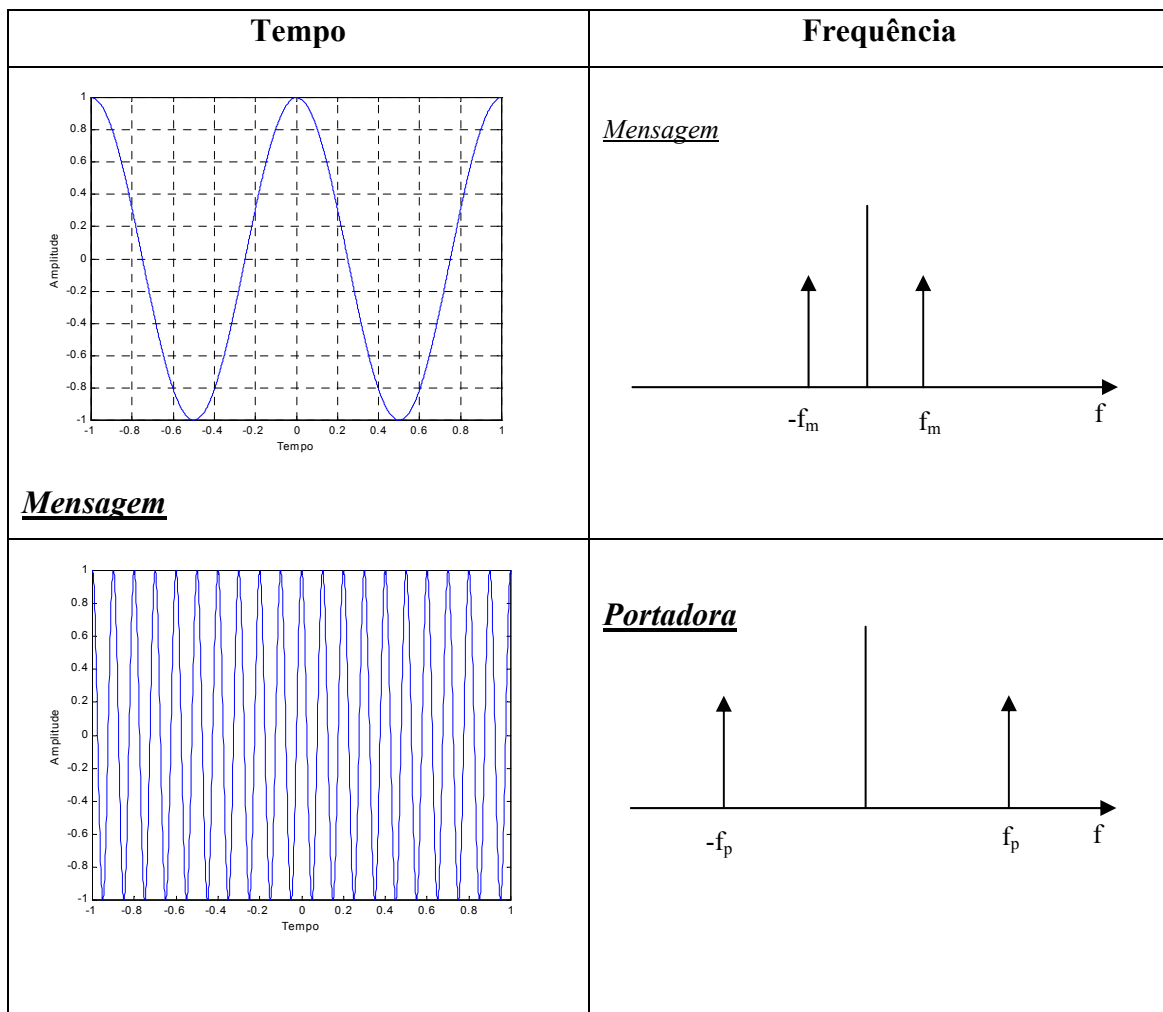
$$x_{AM}(t) = A_p (1 + \mu \cos(2\pi f_m t)) \cos(2\pi f_p t)$$

Com $\mu = \frac{A_m}{A_p}$, é o índice de modulação

Aplicando regras da trigonometria à equação (1.8), temos que:

$$x_{AM}(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) + \frac{A_p}{2} \mu \cos(2\pi (f_p - f_m) t) + \frac{A_p}{2} \mu \cos(2\pi (f_p + f_m) t) \quad (1.9)$$

A figura abaixo representa a geração deste sinal AM quer no domínio do tempo como no domínio do tempo.



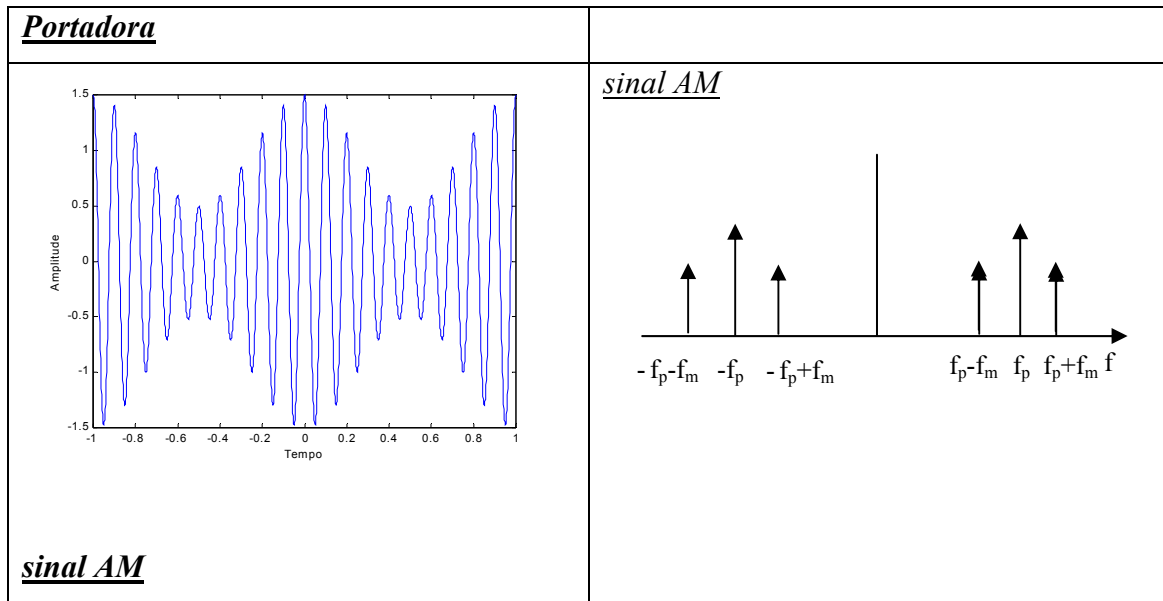


Figura 1.4 Análise da modulação quer no domínio temporal quer na frequência.

1.3 Modulação de amplitude de banda lateral dupla (DSB- Double Side Band)

Um sinal DSB é uma portadora sinudoidal cuja amplitude é proporcional ao sinal mensagem, $x(t)$.

$$x_{DSB}(t) = A_p x(t) \cos(2\pi f_p t) \quad (1.10)$$

A representação na frequência de um sinal DSB é obtida através da sua transformada de Fourier

$$X_{DSB}(f) = \frac{A_p}{2} X(f - f_p) + \frac{A_p}{2} X(f + f_p) \quad (1.11)$$

Onde $X(f)$ é a transformada de Fourier de $x(t)$. Apesar dos sinais DSB e AM serem bastante semelhantes no domínio da frequência (com exceção da ausência da portadora no caso do sinal DSB) o mesmo não acontece no domínio temporal, como se vê na figura

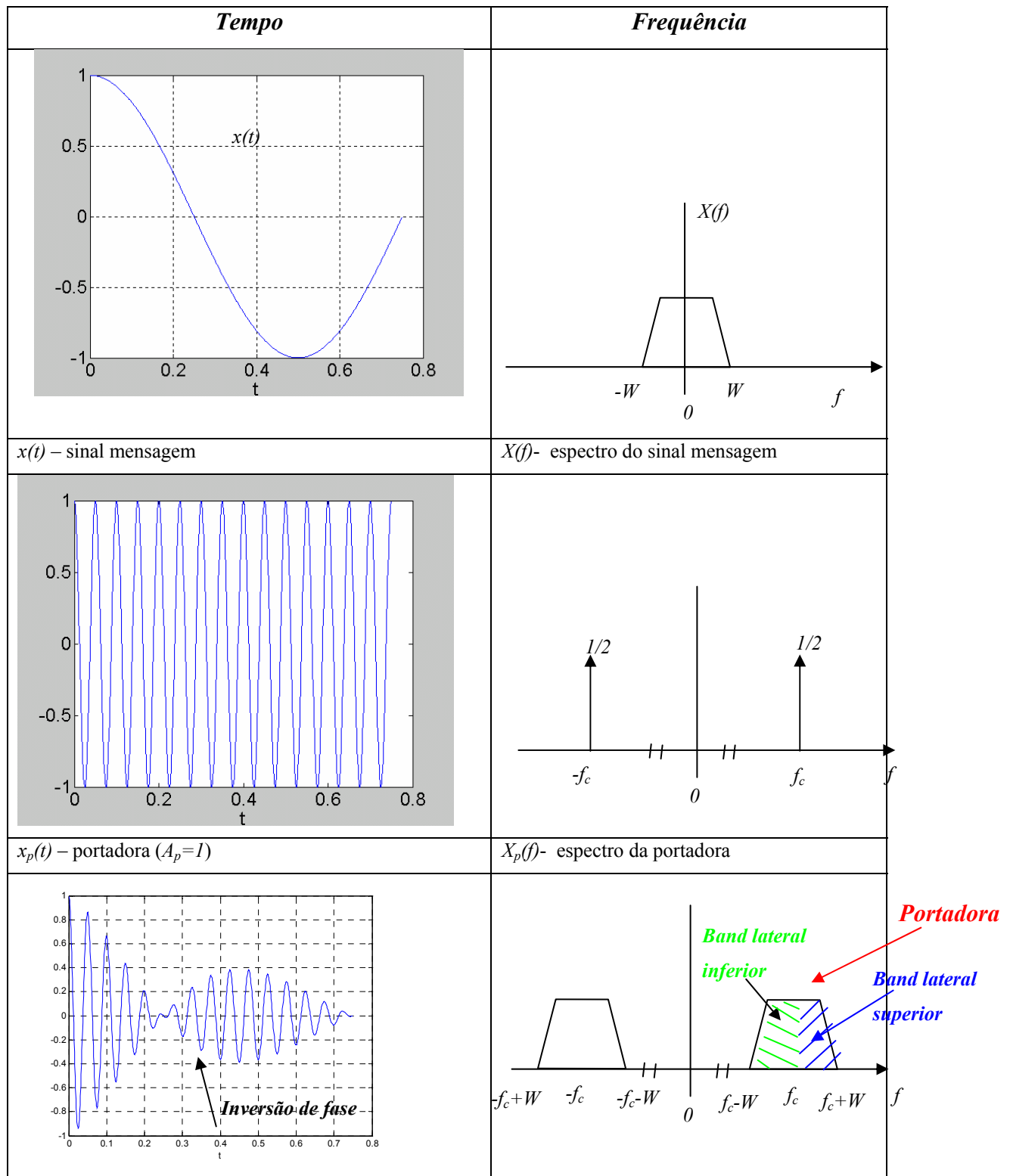


Figura 1.5 Modulação DSB com portadora suprimida.

A inversão de fase que se verifica sempre que $x(t)$ cruza o zero, faz com que o sinal mensagem não se possa recuperar através de um simples detector de envolvente.

A largura de banda necessária para transmitir este sinal é $B_T = 2W$, onde W é a largura de banda do sinal $x(t)$.

A vantagem principal deste tipo de modulação é que a potência média transmitida é toda transmitida nas bandas laterais.

A potência do sinal DSB é dada por:

$$P_{DSB} = 2P_{BL} = \frac{1}{2} A_p^2 S_x \quad (1.12)$$

1.3.1 Desmodulador DSB coerente

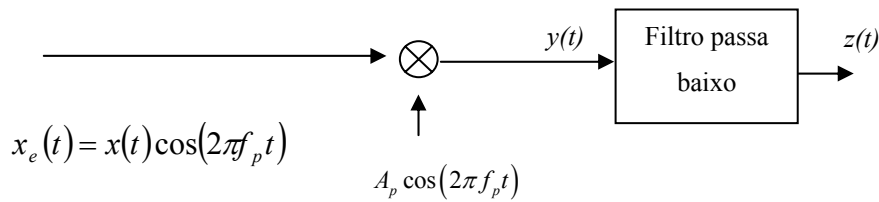


Figura 1.6 Desmodulador DSB coerente.

O sinal que chega ao receptor é $x_e(t) = x(t) A_p \cos(2\pi f_p t)$, este sinal é multiplicado por uma réplica da portadora originando o sinal $y(t)$

À saída do multiplicador temos que:

$$\begin{aligned} y(t) &= \{A_p x(t) \cos(2\pi f_p t)\} A_p \cos(2\pi f_p t) \\ &= A_p^2 \{x(t) \cos(2\pi f_p t)\} \cos(2\pi f_p t) \\ &= A_p^2 \frac{x(t)}{2} (1 + \cos 4\pi f_p t) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Depois de passar pelo filtro passa baixo temos que:

$$z(t) = \frac{A_p^2}{2} x(t) \quad (1.14)$$

ou seja o sinal mensagem que foi transmitido afectado de um factor de escala.

1.3.2 Influência da fase da portadora local

Como se viu na secção anterior é possível realizar a desmodulação coerente do sinal DSB, mas no entanto, é necessário que no receptor se seja capaz de replicar a portadora não só em frequência como em fase, o que não é uma tarefa fácil já que o sinal DSB é um sinal de portadora suprimida. Iremos estudar o que acontece se a portadora local tiver a mesma frequência que a portadora do emissor mas com uma fase diferente. Neste caso temos que:

$$\begin{aligned}
 z(t) &= \left\{ A_p x(t) \cos(2\pi f_p t) \right\} A_p \cos(2\pi f_p t + \phi) \\
 &= \frac{A_p^2}{2} \left\{ x(t) \cos(4\pi f_p t + \phi) + \cos(\phi) \right\} \\
 &= A_p^2 \frac{x(t)}{2} \cos(\phi)
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

O sinal à saída do receptor aparece multiplicado pelo factor $\cos \phi$, se por acaso $\phi = \frac{\pi}{2}$, o sinal à saída do receptor seria 0 o que seria um desastre!

1.4 Modulação de banda lateral única

(SSB- Single Side Band)

1.4.1 Produção de sinais SSB

Como se viu anteriormente, em AM convencional transmitem-se duas bandas laterais mais uma componente correspondente à frequência da portadora. A portadora não transmite informação, destina-se a facilitar a detecção do sinal. Por outro lado as duas bandas laterais contêm toda a informação do sinal modulante (mensagem). Os sistemas de comunicação em que se envia apenas uma das bandas laterais são chamados de sistemas de banda lateral única (SSB, Single Side Band). A vantagem destes sistemas é de permitir que a largura de banda necessária para a transmissão do sinal SSB seja metade da do sinal AM ao mesmo tempo que representam uma poupança de potência. A principal desvantagem consiste na maior complexidade dos respectivos emissores e receptores quando comparados com os sistemas AM convencionais.

O sinal SSB é produzido, como se mostra na Figura 1.7, utilizando um modulador DSB seguido de um filtro passa banda que tem por objectivo filtrar ou a banda lateral superior do sinal ou a banda lateral inferior do sinal SSB

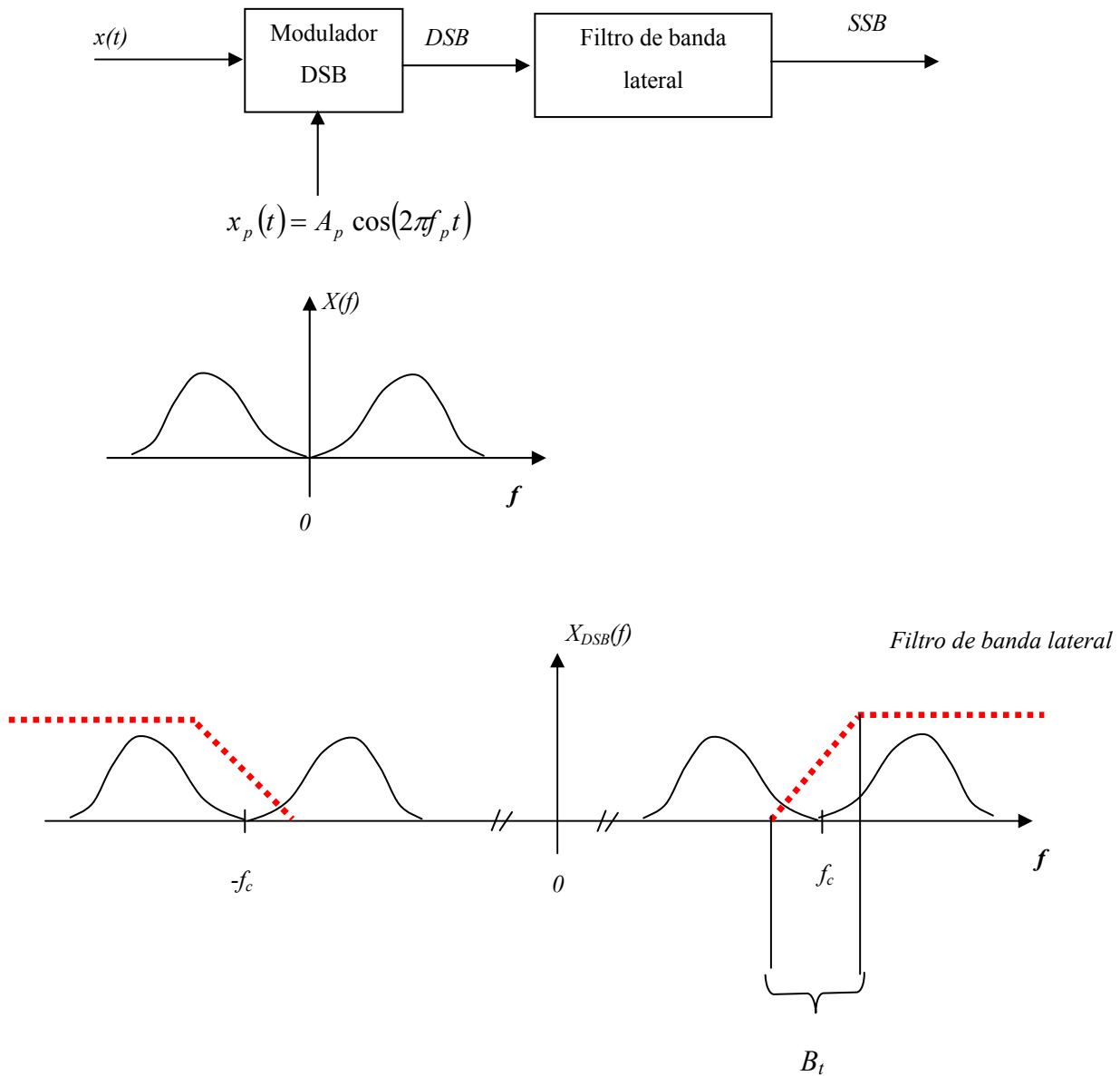


Figura 1.7 Geração de sinal SSB através da filtragem de uma banda lateral do sinal DSB.

Este método de produção de sinais SSB apresenta dificuldades de implementação, a que salta à primeira vista é que exige um conteúdo de baixas frequências desprezável no espectro do sinal $x(t)$. Esta propriedade verifica-se contudo em muitos sinais com interesse prático, como por exemplo a voz humana. A Figura 1.7 mostra como é

possível aproveitar a zona de conteúdo de frequências desprezável do sinal DSB para a zona de transição do filtro de banda lateral B_t .

Uma regra prática para o desenho do filtro impõe $B_t > 1\%$ da frequência de corte nominal (f_p). Daqui se conclui que $f_p < 100 B_t$; como B_t é imposta pelo sinal de banda base, f_p terá um valor limitado. Por isso em emissores práticos o sinal SSB é produzido com portadoras de baixa frequência, efectuando-se de seguida uma conversão para a frequência pretendida.

1.5 Descrição matemática de sinais SSB

O método descrito acima para produzir sinais SSB não é viável no caso de sinais com conteúdo importante de baixas frequências (por exemplo, sinais vídeo). Neste caso pode-se utilizar outro tipo de modulador SSB baseado na transformada de Hilbert.

1.5.1 Transformadas de Hilbert

Considere um filtro de quadratura, que introduz um desvio de fase de -90° em todas as componentes de frequência positiva e $+90^\circ$ em todas as componentes de frequência negativa. Como um desvio de fase de $\pm 90^\circ$ equivale a uma multiplicação por $e^{\pm j90^\circ} = \pm j$, a função de transferência do filtro de quadratura pode ser escrita através da função sign:

$$H_Q(f) = -j \operatorname{sgn}(f) = \begin{cases} -j & f > 0 \\ +j & f < 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

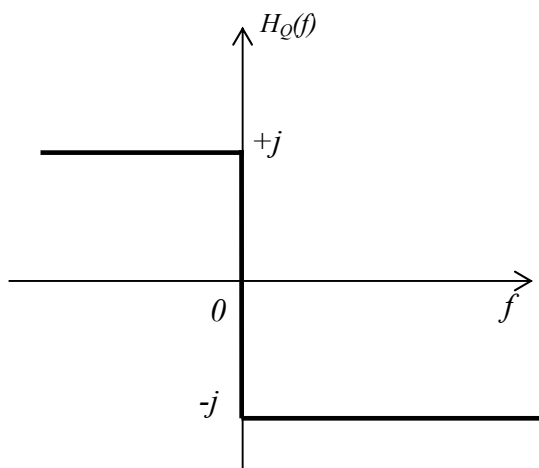


Figura 1.8: Função de transferência do filtro de quadratura.

A resposta impulsional do filtro de quadratura é $h_Q(t) = \frac{1}{\pi t}$.

Se se considerar que um sinal $x(t)$ é aplicado ao filtro de quadratura à saída teremos no temporal:

$$y(t) = \hat{x}(t) = x(t) * h_Q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_Q(t - \tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\lambda)}{t - \lambda} d\lambda \quad (1.17)$$

E no domínio da frequência:

$Y(f) = \hat{X}(f) = \begin{cases} -jX(f) & f \geq 0 \\ jX(f) & f < 0 \end{cases}$	(1.18)
------------------------------------------------------------------------------------	--------

onde $\hat{x}(t)$ é a transformada de Hilbert de $x(t)$, e $\hat{X}(f)$ a transformada de Fourier de $\hat{x}(t)$.

De seguida define-se o chamado sinal analítico:

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \quad (1.19)$$

É fácil concluir que $z(t)$ tem o seguinte espectro:

$Z(f) = X(f) + j\hat{X}(f) = \begin{cases} X(f) + X(f) & f \geq 0 \\ X(f) - X(f) & f < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2X(f) & f \geq 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$	(1.20)
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------

Fazendo uso de uma das propriedades da transformada de Fourier verifica-se a seguinte propriedade:

$$z(t) e^{j2\pi f_p t} \leftrightarrow Z(f - f_p) \quad (1.21)$$

De modo idêntico pode-se mostrar que o conjugado de $z(t)$ tem as seguintes características:

$$Z^*(f) = X^*(f) - j\hat{X}^*(f) = \begin{cases} X^*(f) - j(-jX^*(f)) & f \geq 0 \\ X^*(f) - j(jX^*(f)) & f < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & f \geq 0 \\ 2X^*(f) & f < 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

E ainda que

$$z^*(t)e^{-j2\pi f_p t} \leftrightarrow Z(f + f_p) \quad (1.23)$$

Com base nestes resultados conclui-se fialmente que o sinal SSB (banda lateral superior) em a seguinte expressão matemática:

$$\begin{aligned} x_{SSB}(t) &= \frac{1}{2} \left[z(t)e^{j2\pi f_p t} + z^*(t)e^{-j2\pi f_p t} \right] \\ &= \text{Re} \left[z(t)e^{j2\pi f_p t} \right] \\ &= \text{Re} \left[(x(t) + j\hat{x}(t))e^{j2\pi f_p t} \right] \\ &= x(t)\cos 2\pi f_p t - \hat{x}(t)\sin 2\pi f_p t \end{aligned} \quad (1.24)$$

Com nesta equação pode-se definir outro tipo de modulador SSB que não necessita de filtro de banda lateral, sendo portanto útil para sinais com conteúdo elevado de baixas frequências. Este modulador representa-se na figura seguinte:

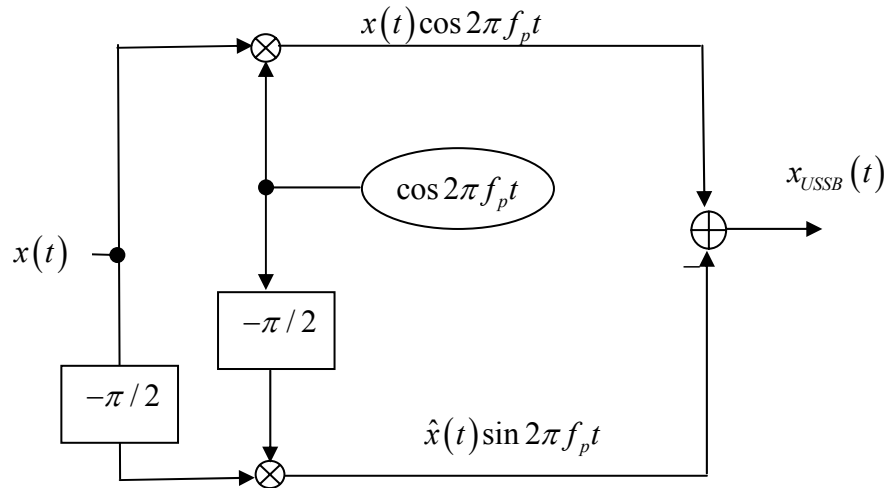


Figura 1.9 Modulador USSB.

Um problema prático na implementação do modulador SSB acima descrito consiste na dificuldade em construir um circuito de rotação de fase de banda larga.

1.5.2 Desmodulador SSB coerente

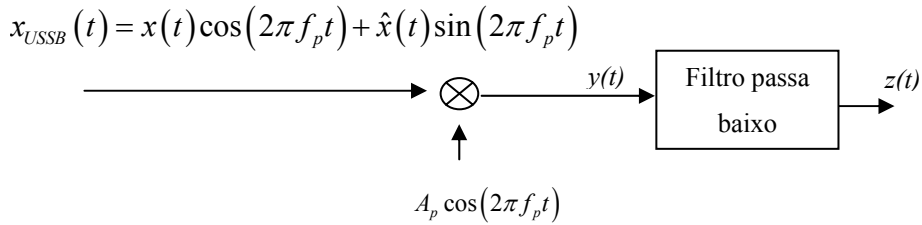


Figura 1.10 Desmodulador DSB coerente.

O sinal que chega ao receptor é $x_e(t) = x(t) A_p \cos(2\pi f_p t)$, este sinal é multiplicado por uma réplica da portadora originando o sinal $y(t)$

À saída do multiplicador temos que:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \{x(t)\cos(2\pi f_p t) - \hat{x}(t)\sin(2\pi f_p t)\} A_p \cos(2\pi f_p t) & (1.25) \\
 &= A_p \{x(t)\cos(2\pi f_p t)\} \cos(2\pi f_p t) - A_p \{\hat{x}(t)\sin(2\pi f_p t)\} \cos(2\pi f_p t) \\
 &= A_p \frac{x(t)}{2} (1 + \cos 4\pi f_p t) - A_p \frac{x(t)}{2} (0 + \sin 4\pi f_p t)
 \end{aligned}$$

Depois de passar pelo filtro passa baixo temos que:

$$z(t) = \frac{A_p}{2} x(t) \quad (1.26)$$

ou seja o sinal mensagem que foi transmitido afectado de um factor de escala.

1.5.3 Influência da fase da portadora local

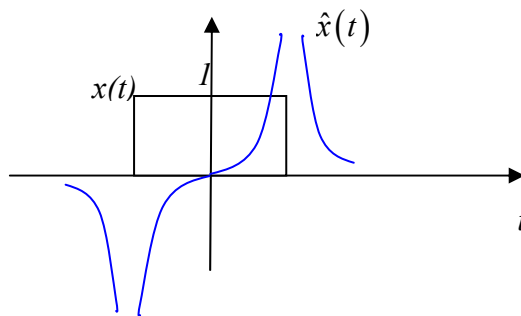
$$\begin{aligned}
 y(t) &= \{x(t)\cos(2\pi f_p t) - \hat{x}(t)\sin(2\pi f_p t)\} A_p \cos(2\pi f_p t + \phi) \quad (1.27) \\
 &= A_p \{x(t)\cos(2\pi f_p t)\} \cos(2\pi f_p t) - A_p \{\hat{x}(t)\sin(2\pi f_p t)\} \cos(2\pi f_p t) \\
 &= A_p \frac{x(t)}{2} (\cos(\phi) + \cos 4\pi f_p t) + A_p \frac{\hat{x}(t)}{2} (\sin(\phi) + \sin 4\pi f_p t)
 \end{aligned}$$

Depois de passar pelo filtro passa-baixo temos que:

$$z(t) = A_p \frac{x(t)}{2} \cos(\phi) + A_p \frac{\hat{x}(t)}{2} \sin(\phi) \quad (1.28)$$

Daqui se conclui que conforme ϕ aumenta o termo $x(t)\cos\phi$ é atenuado e pior que isto, o termo $\hat{x}(t)\sin\phi$ começa a ser predominante. Para $\phi = \frac{\pi}{2}$ apenas se detecta o termo de distorção $\hat{x}(t)$.

No caso de sinais audio, como o ouvido humano tem pouca sensibilidade a rotações de fase não consegue distinguir $x(t)$ de $\hat{x}(t)$, e portanto o sincronismo de fase não é importante. No entanto, para outro tipo de sinais, ex: sinais digitais a falha de sincronismo é importante como se vê pela figura.



1.6 Vestígio de Banda Lateral (VSB, ‘Vestigial Side Band’)

Nesta técnica de transmissão, grande parte de uma das bandas laterais é transmitida em conjunto com um vestígio de outra banda lateral. O sinal VSB é muito utilizado na televisão, e certos sistemas de transmissão de dados. A largura de banda típica para transmitir um sinal VSB é cerca de 1.25 vezes a de um sinal SSB.

O sinal é produzido por filtragem de um sinal DSB. O filtro utilizado para produzir o sinal VSB deverá ter uma simetria ímpar em torno de f_p e reposita a 50% em f_p . O sinal pode ser detectado por meio de uma detecção síncrona.

1.7 Relação Sinal Ruído

1.7.1 Sistema banda base

Iremos considerar como referência um sistema de comunicação que transmite um sinal $x(t)$ na banda base sem qualquer tipo de modulação. $x(t)$ é um sinal de largura banda W e normalizado tal que:

$$|x(t)| \leq 1 \qquad S_x = \overline{x^2} = \langle x^2(t) \rangle \leq 1$$

O canal de transmissão não distorce o sinal mas introduz ruído Gaussiano, $n(t)$, de média nula e variância σ^2 com função densidade probabilidade:

$$p_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} \qquad (1.29)$$

A densidade espectral de potência do ruído Gaussiano é constante e dada por

$$G_n(f) = \frac{\eta}{2}, \text{ o termo } \frac{1}{2} \text{ evidencia que se trata de uma densidade espectral de potência de}$$

banda lateral dupla.

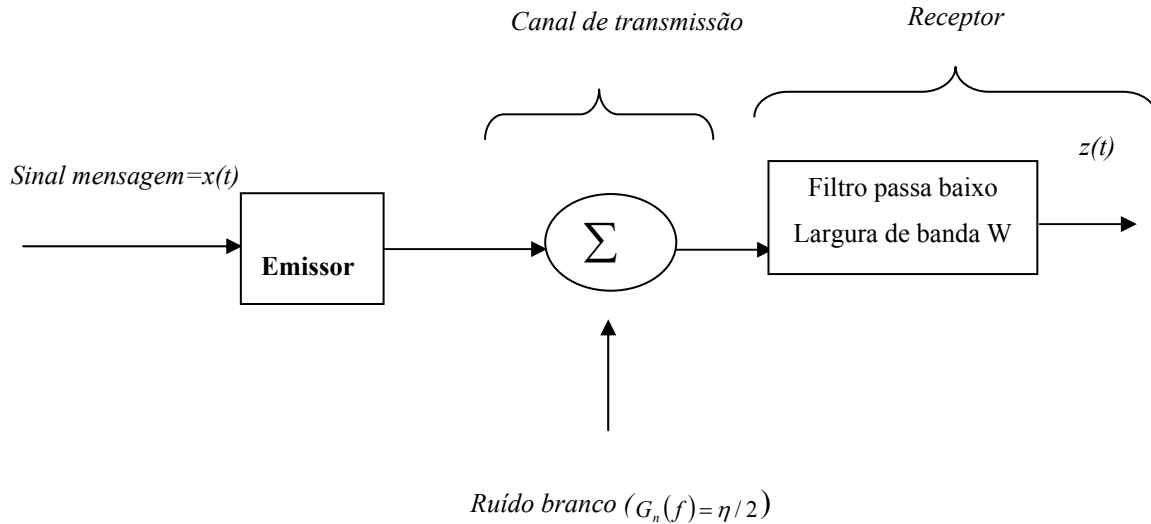


Figura 1.11 Sistema de transmissão banda base.

O canal de transmissão, é um canal ideal que não introduz distorção, no entanto adiciona ruído branco com densidade espectral de potência $G_n(f) = \eta/2$. O sinal recebido é uma versão atenuada de $x(t)$. À entrada do receptor tem-se um filtro passa-banda que iremos ideal (rectangular) para simplificar os cálculos com uma largura de banda W . O sinal à saída do receptor:

$$z(t) = x(t) + n_f(t) \quad (1.30)$$

Neste caso considerou-se que o sinal não é atenuado e $n_f(t)$ é o ruído branco depois de passar pelo filtro passa baixo de largura de banda W

A potência do sinal no receptor $S_r = S_x$

A potência do ruído à saída do receptor é

$$N_r = \int_{-W}^W \frac{\eta}{2} |H_r(f)|^2 df = \eta W \quad (1.31)$$

A relação sinal ruído (RSR) no receptor é

$$RSR = \frac{S_x}{\eta W} = \gamma \quad (1.32)$$

γ - Gamma

1.8 Relação Sinal Ruído em sistemas DSB

A figura abaixo representa um sistemas DSB

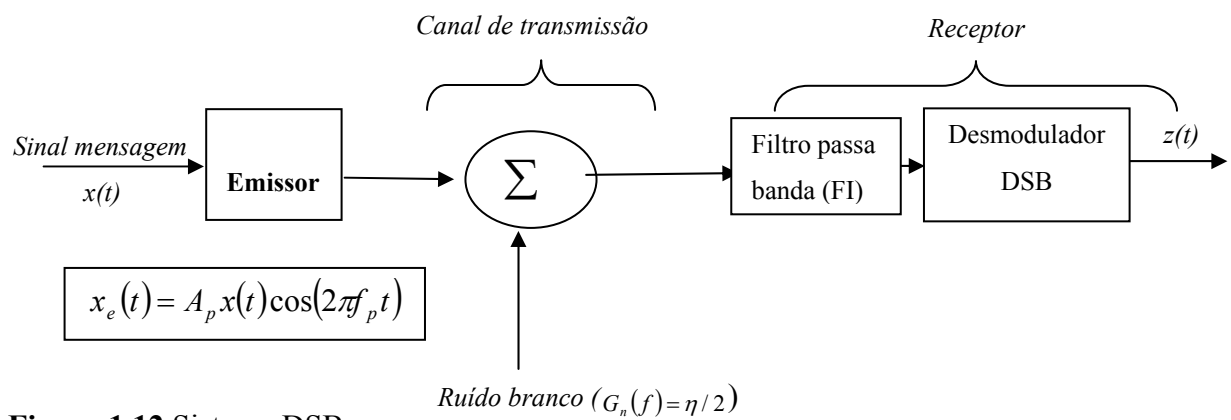
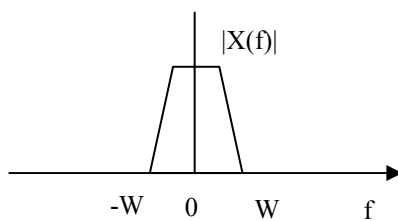
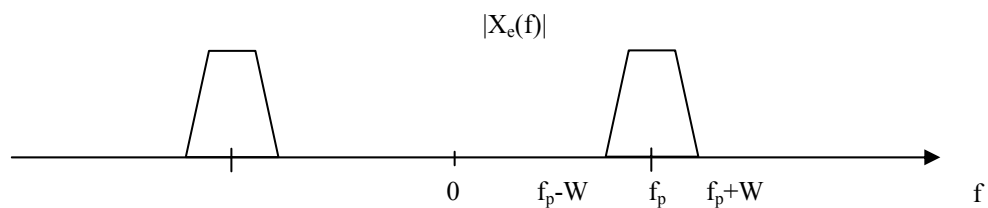


Figura 1.12 Sistema DSB.

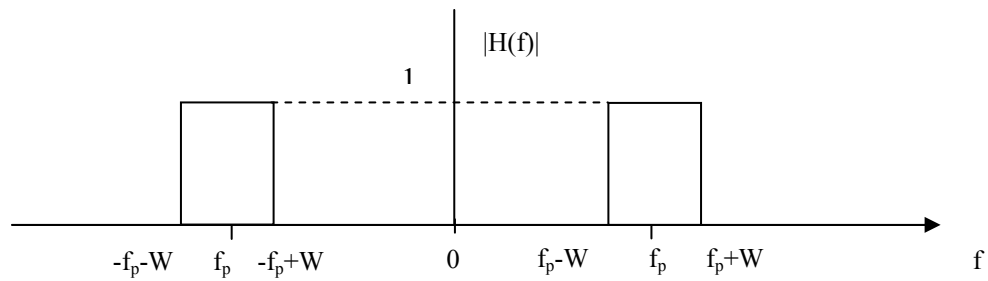
a) Espectro do sinal mensagem $x(t)$



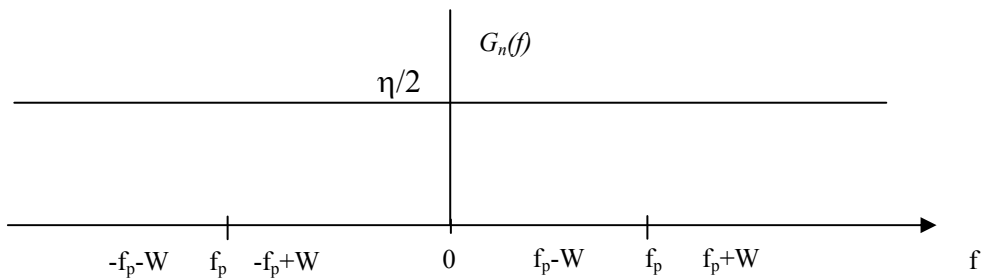
b) Espectro do sinal DSB $x_e(t)$



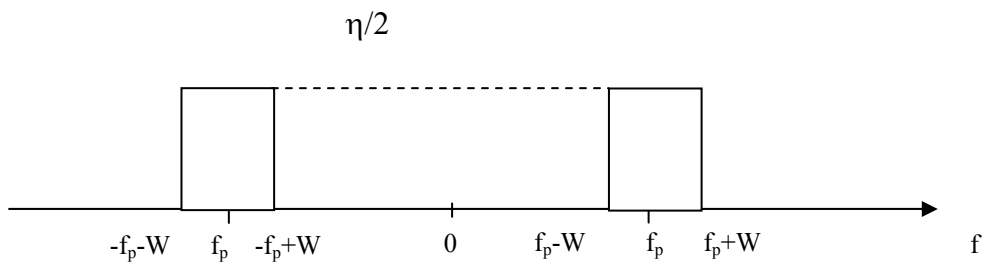
c) Função de transferência do filtro de Frequência Intermédia



d) Densidade espectral de potência do ruído branco



e) Densidade espectral de potência à saída do filtro FI



1.9 Caracterização de ruído passabanda

O ruído $n(t)$ é uma função amostra de um processo gaussiano estacionário e ergódico

$$\overline{n} = 0 \quad \overline{n^2} = \sigma_n^2 = N_r$$

Podemos descrever $n(t)$ em termos de componentes em fase ($n_i(t)$) e quadratura ($n_q(t)$)

$$n(t) = n_i(t) \cos \omega_p t - n_q(t) \sin \omega_p t \quad (1.33)$$

As duas componentes $n_i(t)$ e $n_q(t)$, são variáveis aleatórias gaussianas conjuntas (jointly).

Descrevendo o ruído passa banda em termos de amplitude e fase aleatórias

$$\begin{aligned} n(t) &= r_n(t) \cos(\omega_p t + \phi_n(t)) \\ &= r_n(t) [\cos \omega_p t \cos \phi_n(t) - \sin \omega_p t \sin \phi_n(t)] \\ &= n_i(t) \cos \omega_p t - n_q(t) \sin \omega_p t \end{aligned} \quad (1.34)$$

onde

$$\begin{aligned} n_i(t) &= r_n(t) \cos \phi_n(t) \\ n_q(t) &= r_n(t) \sin \phi_n(t) \end{aligned} \quad (1.35)$$

As funções $n_i(t)$ e $n_q(t)$, são as funções banda base que ocupam a largura de banda

$|f| \leq W$, de modo que quando estas funções são moduladas usando DSB, nas portadoras seno e coseno, o ruído passa banda resultante ocupa a largura de banda $f_p - W \leq |f| \leq f_p + W$

A potência do ruído

$$\begin{aligned} \overline{n(t)^2} &= \overline{(n_q(t) \cos \omega_p t)^2 + (n_i(t) \sin \omega_p t)^2 - 2n_q(t)n_i(t) \sin \omega_p t \cos \omega_p t} \\ &= \frac{1}{2} \overline{n_q^2(t)} + \frac{1}{2} \overline{n_i^2(t)} \end{aligned} \quad (1.36)$$

A potência associada às componentes em fase e quadratura é idêntica, temos que:

$$P_{n_i} = P_{n_q} = \overline{n_i^2} = \overline{n_q^2} \quad (1.37)$$

E portanto:

$$\overline{n^2} = \overline{n_i^2} = \overline{n_q^2} = 2 \times \frac{\eta}{2} \times 2W = 2\eta W \quad (1.38)$$

Assim, temos que a densidade espectral de potência das componentes na banda base

$$n_i(t) \text{ e } n_q(t)$$

$$G_{n_i}(f) = G_{n_q}(f) = \eta \quad (1.39)$$

1.10 Relação Sinal Ruído em sistemas DSB coerentes

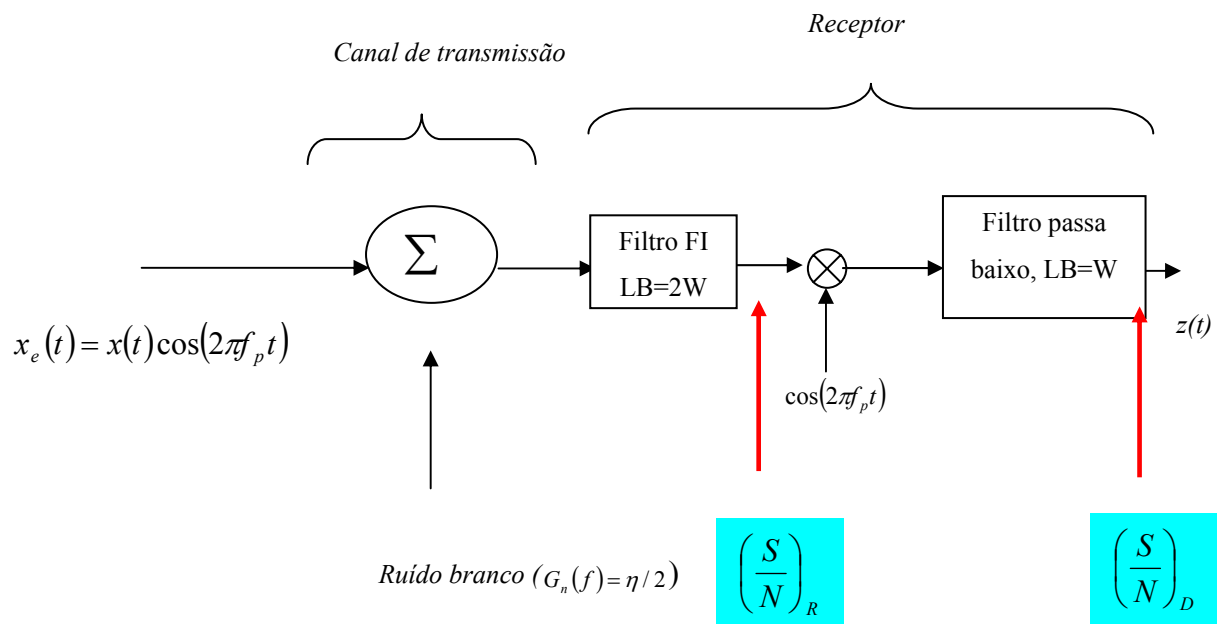


Figura 1.13 esmodulador DSB coerente.

O primeiro bloco do receptor é o Filtro FI (Frequência intermédia), localizado à frequência f_p e largura de banda $2W$. A função deste filtro é filtrar o ruído branco introduzido pelo canal e deixar passar inalterado o sinal

Para realizar a análise da relação sinal ruído consideramos a relação potência do sinal recebido S_r e o a potência do ruído nos vários pontos do receptor.

O sinal que chega ao receptor é $x_e(t) = x(t)\cos(2\pi f_p t)$, cuja potência é $S_r = \frac{S_x}{2}$, a

relação sinal ruído à saída do filtro IF é

$$RSR = \frac{S_r}{2\eta W} = \frac{\gamma}{2} \quad (1.40)$$

À saída do multiplicador temos que:

$$\begin{aligned} y(t) &= \{x(t)\cos(2\pi f_p t) + n(t)\}\cos(2\pi f_p t) \\ &= \{x(t)\cos(2\pi f_p t) + n_i(t)\cos\omega_p t - n_q(t)\sin\omega_p t\}\cos(2\pi f_p t) \\ &= \frac{x(t) + n_i(t)}{2}(1 + \cos 4\pi f_p t) - \frac{n_q(t)}{2}\sin 4\pi f_p t \end{aligned} \quad (1.41)$$

Depois da filtragem pelo filtro passa baixo temos:

$$z(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}n_i(t) \quad (1.42)$$

A Relação Sinal Ruído

$$RSR = \frac{\frac{1}{4}\overline{x^2(t)}}{\frac{1}{4}\overline{n_i^2(t)}} = \frac{S_x}{2\eta W} = \frac{S_r}{\eta W} = \gamma \quad (1.43)$$

1.11 Relação sinal Ruído em sistemas SSB

Antes do multiplicador a potência do sinal SSB é $S_r = \frac{S_x}{4}$

$$RSR = \frac{S_r}{\eta W} = \gamma \quad (1.44)$$

Depois do multiplicador

$$\begin{aligned} y(t) &= \left\{ \frac{1}{2} x(t) \cos(2\pi f_p t) + j \frac{1}{2} \hat{x}(t) \sin(2\pi f_p t) + n(t) \right\} \cos(2\pi f_p t) \\ &= \left\{ \frac{1}{2} x(t) \cos(2\pi f_p t) + j \frac{1}{2} \hat{x}(t) \sin(2\pi f_p t) + n_i(t) \cos \omega_p t - n_q(t) \sin \omega_p t \right\} \cos(2\pi f_p t) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x(t) + n_i(t) \right) (1 + \cos 4\pi f_p t) - \frac{n_q(t)}{2} \sin 4\pi f_p t + j \hat{x}(t) \sin 4\pi f_p t \end{aligned}$$

Depois do filtro passa baixo

A potência de ruído à saída do filtro FI de largura de banda W é ηW , e tendo em conta a representação do ruído passa banda em termos de componentes em fase e quadratura, temos que:

$$\overline{n^2} = \overline{n_i^2} = \overline{n_q^2} = 2 \times \frac{\eta}{2} \times W = \eta W \quad (1.45)$$

Assim, temos que a densidade espectral de potência das componentes na banda base

$n_i(t)$ e $n_q(t)$

$$G_{n_i}(f) = G_{n_q}(f) = \frac{\eta}{2} \quad (1.46)$$

$$z(t) = \frac{1}{4}x(t) + \frac{1}{2}n_i(t) \quad (1.47)$$

A Relação Sinal Ruído

$$RSR = \frac{\frac{1}{16} \overline{x^2(t)}}{\frac{1}{4} \overline{n_i^2(t)}} = \frac{S_x}{4\eta W} = \frac{S_r}{\eta W} = \gamma \quad (1.48)$$

1.12 Relação Sinal Ruído em AM convencional

A potência do sinal AM $S_r = \frac{1}{2}(1 + S_x)$

$$\begin{aligned} y(t) &= \{(1 + \mu x(t)) \cos(2\pi f_p t) + n(t)\} \cos(2\pi f_p t) \\ &= \{(1 + \mu x(t)) \cos(2\pi f_p t) + n_i(t) \cos \omega_p t - n_q(t) \sin \omega_p t\} \cos(2\pi f_p t) \\ &= \frac{(1 + \mu x(t)) + n_i(t)}{2} (1 + \cos 4\pi f_p t) - \frac{n_q(t)}{2} \sin 4\pi f_p t \end{aligned}$$

Tendo em conta que para além do filtro passa baixo também a componente contínua é eliminada

$$RSR = \frac{\frac{1}{4} \overline{x(t)^2}}{\frac{1}{4} \overline{n_i^2(t)}} = \frac{S_x}{2\eta W} = \frac{S_r}{\eta W} = \gamma \quad (1.49)$$