# Resolução do Exame de Análise de Circuitos

(Época normal 2008/09)

MIEET e Física

1. Dado que os dois circuitos (quadripolos) estão em cascata a maneira mais simples de caracterizar o quadripolo equivalente é através da multiplicação das matrizes $A$ (ou ABCD) que caracterizam cada um dos circuitos:

$$[A_{eq}] \quad = \quad [A_a] \times [A_b]$$

Assim, é necessário converter $[Y_a] \rightarrow [A_a]$ e $[Z_b] \rightarrow [A_b]$. Estas conversões estão resolvidas com detalhe na resolução da folha de problemas n.o 9.

$[A_a] = \begin{bmatrix} 1 & 1\ \text{k}\Omega \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $[A_b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\,1\ \text{mS} & 1 \end{bmatrix}$

finalmente $[A_{eq}] = \begin{bmatrix} 1+j & 1\ \text{k}\Omega \\ j\,1\ \text{mS} & 1 \end{bmatrix}$

2. O interruptor $S_1$ está fechado para $t < 0$ e está aberto para $t \geq 0$.

**<u>Para $t < 0$</u>** o funcionamento do circuito é do tipo DC em regime permanente. Assim, para este intervalo de tempo as bobinas funcionam como 'curto-circuitos' (c.c.) $(v(t) = L\,d\,i(t)/dt = 0)$ e os condensadores funcionam como 'circuitos abertos'(c.a.) $(i(t) = C\,d\,v(t)/dt = 0)$. A figura 1 a) mostra o circuito equivalente para $t < 0$.

Desta figura é possível observar que $C_2$ está em c.c., ou seja, $v_{C_2}(t) = 0$. A corrente que flui em $L_2$ é $i_{L_2}(t) = -G_m\,v_{C_1}(t)$ (as resistências $R_4$ – $R_6$ estão em c.c). Assim temos que $i_{R_6}(t) = 0$. Dado que também não flui corrente em $R_2$ então $v_{C_1}(t)$ é igual a $v_{R_3}(t)$.

Para o circuito da figura 1 a) podemos escrever

$$\begin{aligned} i_{R_1}(t) + G_m\,v_{C_1}(t) &= i_{R_3}(t) \\ \Leftrightarrow \frac{V_s - v_{C_1}(t)}{R_1} + G_m\,v_{C_1}(t) &= \frac{v_{C_1}(t)}{R_3} \\ \Leftrightarrow v_{C_1}(t) &= V_s\,\frac{R_3}{R_3 + R_1 - G_m\,R_3\,R_1} = -20\ \text{V} \end{aligned}$$

ou seja, para $t < 0$ temos que

$$\begin{aligned} v_{C_2}(t) &= 0 \\ i_{R_6}(t) &= 0 \\ i_{L_2}(t) &= 40\ \text{mA} \end{aligned}$$

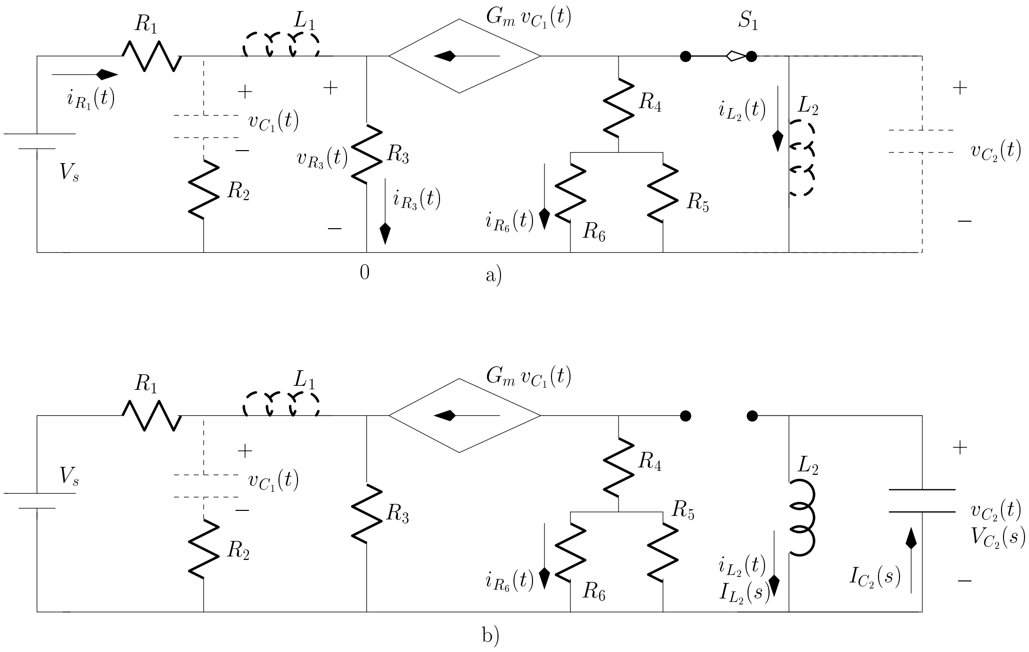


Figura 1: *Figura do problema 2.*

<u>**Para** $t \geq 0$</u> o circuito equivalente é mostrado na figura 1 b). Note que $L_1$ e $C_1$ continuam em regime DC permanente pelo que continuam a comportar-se (electricamente) como c.c. e c.a, respectivamente. Assim continuamos a obter $v_{C_1}(t) = -20$ V. A corrente $G_m\, v_{C_1}(t)$ (da fonte controlada por tensão) flui agora pelas resistências $R_4 - R_6$. De facto, as resistências $R_5$ e $R_6$ formam um divisor de corrente. Assim, temos que

$$i_{R_6}(t) \quad = \quad -G_m\, v_{C_1}(t) \times \frac{R_5}{R_5 + R_6} = 13.3 \text{ mA} \quad (t \geq 0)$$

No lado direito do circuito temos agora um circuito LC (oscilador simples) cuja análise detalhada, em termos de resposta natural, é efectuada na folha de exercícios N.o 10 no domínio do tempo[1] (resolução de eq. dif. lin. homogéneas.). Repete-se a análise mas agora resolvemos o problema recorrendo a transformadas de Laplace.

As condições inciais são as seguintes (decorrentes da análise do circuito para $t < 0$)

$$i_{L_2}(t = 0) \quad = \quad I_{lo} = 40 \text{ mA}$$

[1]Note que as condições iniciais no problema da folha 10 são diferentes das deste problema.

$$v_{C_2}(t=0) \quad = \quad 0$$

Para o circuito constituído por $L_2$ e $C_2$ podemos escrever:

$$\begin{aligned} I_{L_2}(s) &= I_{C_2}(s) \\ \Leftrightarrow \frac{V_{C_2}(s)}{s\,L_2} + \frac{I_{lo}}{s} &= -s\,C_2\,V_{C_2}(s) \end{aligned}$$

ou seja

$$V_{C_2}(s) \quad = \quad -I_{lo}\,\frac{L_2}{s^2\,L_2\,C_2+1} \tag{1}$$

De acordo com a tabela de transformadas de Laplace, incluída no enunciado do teste, temos que:

$$\frac{a}{s^2+a^2} \quad \longleftrightarrow \quad \sin(a\,t)\,u(t)$$

A equação 1 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$V_{C_2}(s) \quad = \quad -I_{lo}\,\sqrt{\frac{L_2}{C_2}}\;\frac{\frac{1}{\sqrt{L_2\,C_2}}}{s^2+\frac{1}{L_2\,C_2}}$$

em que $a^2 = 1/(L_2\,C_2)$. Usando as equações anteriores obtemos $v_{C_2}(t)$ (para $t \geq 0$):

$$v_{C_2}(t) \quad = \quad -I_{lo}\,\sqrt{\frac{L_2}{C_2}}\;\sin\left(\frac{1}{\sqrt{L_2\,C_2}}\;t\right)\;u(t)$$

A amplitude (valor absoluto) é igual a 1.26 Volts e a frequência é igual a 5033 Hertz (período aproximadamente igual a 0.2 ms)

A figura 2 mostra as formas de onda para $v_{C_2}(t)$, $I_{R_6}(t)$ e $I_{L_2}(t)$ (esta última não era pedida no teste)

$$I_{L_2}(t) = I_{lo}\;u(-t) + I_{lo}\;\cos\left(\frac{1}{\sqrt{L_2\,C_2}}\;t\right)\;u(t)\;,\quad \forall\,t$$

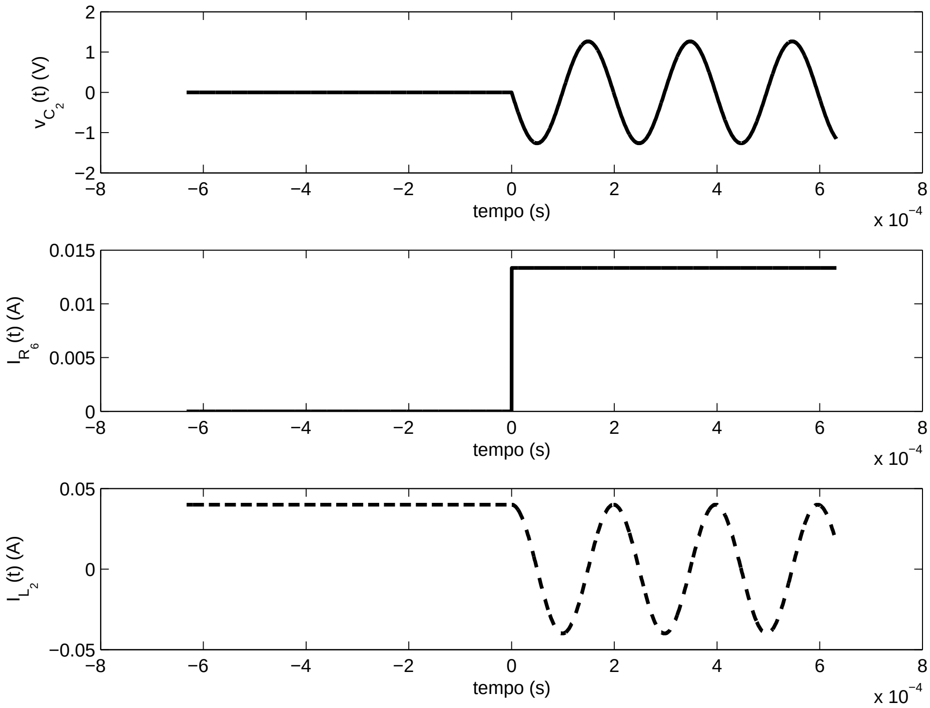


Figura 2: *Formas de onda.*