

Resolução do 3o Mini-teste de Análise de Circuitos

9/Dez/2004

1. (a) Cálculo da corrente em L . A figura 2 mostra o circuito equivalente para $t < t_o$ (válido também para $t < 0$). Para este circuito podemos escrever:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{V_{S_2}}{R_2} & t < t_0 \\ &= 2 \text{ mA} & t < t_0 \end{aligned}$$

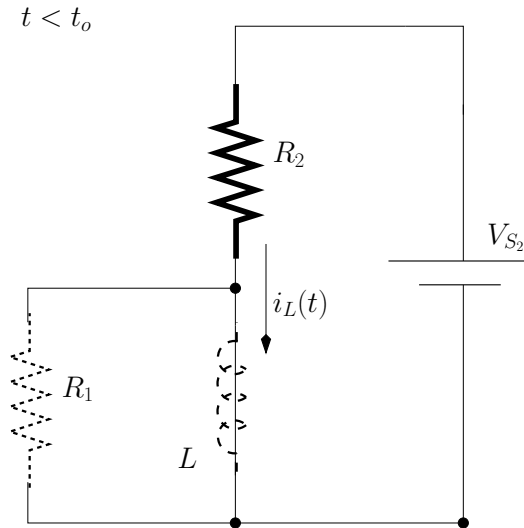


Figura 1: Cálculo de $i_L(t)$ para $t < 0$. Circuito equivalente

- (b) Cálculo da tensão aos terminais de C para $t < 0$. A figura 2 a) mostra o circuito equivalente. A tensão aplicada ao condensador é $V_{S_1} = 5 \text{ V}$ para $t < 0$.
- (c) Cálculo da tensão aos terminais de C para $0 \leq t < t_o$. A figura 2 b) mostra o circuito equivalente.

$$\begin{aligned} i_C(t) &= i_{R_4}(t) & 0 \leq t < t_o \\ \Leftrightarrow -C \frac{dv_C(t)}{dt} &= \frac{v_C(t)}{R_4} & 0 \leq t < t_o \\ \Leftrightarrow \frac{dv_C(t)}{v_C(t)} &= -\frac{1}{R_4 C} dt & 0 \leq t < t_o \end{aligned}$$

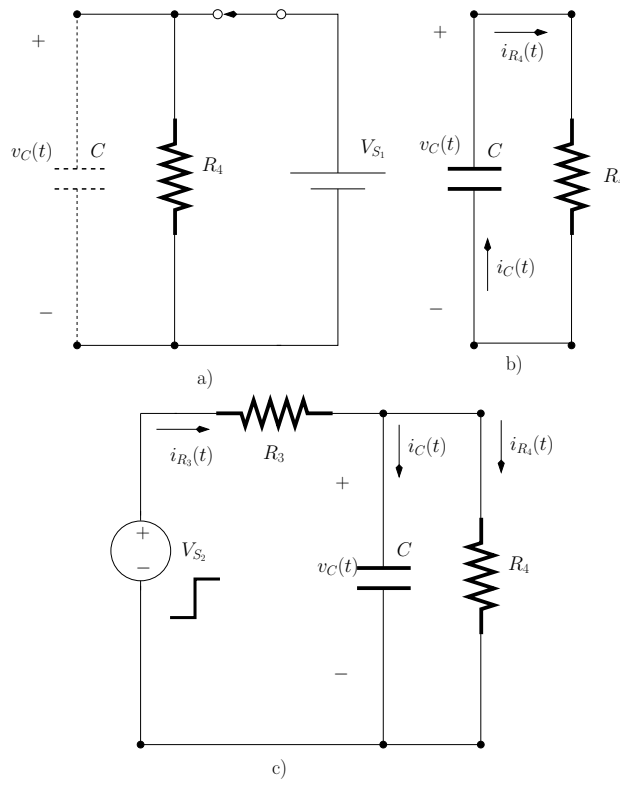


Figura 2: Cálculo de $v_C(t)$. Circuito equivalente para: a) $t < 0$; $0 \leq t < t_o$; $t \geq t_o$.

Integrando obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{v_C(t=0)}^{v_C(t)} \frac{dv_C(t)}{v_C(t)} &= -\frac{1}{R_4 C} \int_0^t dt \quad 0 \leq t < t_o \\ \Leftrightarrow \ln \frac{v_C(t)}{v_C(t=0)} &= -\frac{t}{R_4 C} \quad 0 \leq t < t_o \\ \Leftrightarrow v_C(t) &= v_C(t=0) e^{-t/(R_4 C)} \quad 0 \leq t < t_o \end{aligned}$$

com $v_C(t=0) = V_{S1} = 5 \text{ V}$ e $\tau = R_4 C = 2 \text{ ms}$.

$$v_C(t) = 5 e^{-t/500} \text{ (V)}, \quad 0 \leq t < 1 \text{ ms} \quad (1)$$

(d) Cálculo da tensão aos terminais de C para $t \geq t_o$. A figura 2 c) mostra o circuito equivalente.

$$\begin{aligned} i_{R3}(t) &= i_C(t) + i_{R4}(t) \quad t \geq t_o \\ \Leftrightarrow \frac{V_{S2} - v_C(t)}{R_3} &= C \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R_4} \quad t \geq t_o \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_{S_2}}{R_3} = C \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R'} \quad t \geq t_o \quad (2)$$

em que $R' = R_3 || R_4 = 1 \text{ k}\Omega$. A solução da equação diferencial anterior é igual à soma da solução da equação homogénea, $v_{C_h}(t)$, com a solução particular, $v_{C_p}(t)$:

$$v_C(t) = v_{C_p}(t) + v_{C_h}(t) \quad t \geq t_o$$

A solução particular é uma constante que satisfaz a eq. 2, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{V_{S_2}}{R_3} &= \frac{v_{C_p}(t)}{R'} \quad t \geq t_o \\ \Leftrightarrow v_{C_p}(t) &= \frac{R' V_{S_2}}{R_3} \quad t \geq t_o \\ &= 1 \text{ V} \quad t \geq t_o \end{aligned}$$

A solução da equação homogénea, $v_{C_h}(t)$ tem a seguinte expressão genérica:

$$v_{C_h}(t) = \alpha e^{\beta(t-t_o)} \quad t \geq t_o$$

Substituindo esta expressão na eq. homogénea obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha e^{\beta(t-t_o)} \left(C \beta + \frac{1}{R'} \right) &= 0 \quad t \geq t_o \\ \Leftrightarrow \beta &= -\frac{1}{R' C} \\ &= -1 \text{ krad/s} \end{aligned}$$

Para $t = t_o$ sabemos que:

$$\begin{aligned} v_C(t_o) &= V_{S_1} e^{-t_o/(R_4 C)} \\ \Leftrightarrow \alpha + \frac{R' V_{S_2}}{R_3} &= V_{S_1} e^{-t_o/(R_4 C)} \\ \Leftrightarrow \alpha &= V_{S_1} e^{-t_o/(R_4 C)} - \frac{R' V_{S_2}}{R_3} \\ \Leftrightarrow \alpha &= 2.03 \text{ V} \end{aligned}$$

$$v_C(t) = 1 + 2.03 e^{-10^3 t + 1} \text{ V} \quad t \geq 1 \text{ ms}$$

2. Os parâmetros ABCD de um quadripólo satisfazem, de uma forma geral, as equações seguintes:

$$V_1 = A_{11} V_2 - A_{12} I_2 \quad (3)$$

$$I_1 = A_{21} V_2 - A_{22} I_2 \quad (4)$$

De acordo com esta definição, e para o quadripólo equivalente da figura 3, podemos escrever:

$$A_{eq_{11}} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \quad (5)$$

De acordo com a definição (ver eq. 3) podemos escrever:

$$V_1' = A'_{11} V_2' - A'_{12} I_2' \quad (6)$$

Dado que $V_1 = V_1'$, $V_2' = V_1''$, $V_2 = V_2''$ e $I_2' = -I_1''$ podemos re-escrever a eq. 5 da forma seguinte:

$$A_{eq_{11}} = A'_{11} \left. \frac{V_1''}{V_2''} \right|_{I_2''=0} + A'_{12} \left. \frac{I_1''}{V_2''} \right|_{I_2''=0}$$

ou seja,

$$A_{eq_{11}} = A'_{11} A''_{11} + A'_{12} A''_{21}$$

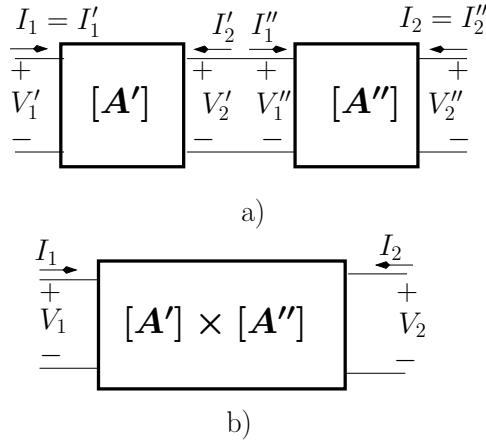


Figura 3: *Circuito do problema 2.*