

Resolução da Folha de exercícios N.º 9

1. Conversões entre parâmetros eléctricos

- (a) Parâmetros ABCD \rightarrow parâmetros Y; Os parâmetros ABCD satisfazem o sistema de equações indicado

$$\begin{cases} V_1 = A_{11} V_2 - A_{12} I_2 & [1] \\ I_1 = A_{21} V_2 - A_{22} I_2 & [2] \end{cases} \quad (1)$$

Resolvendo a eq. [1] (do sistema de equações definido por (1)) em ordem a I_2 obtemos:

$$I_2 = \frac{-1}{A_{12}} V_1 + \frac{A_{11}}{A_{12}} V_2 \quad (2)$$

Substituindo I_2 , dado por esta última eq., na eq. [2] do sistema de equações definido por (1) temos:

$$\begin{aligned} I_1 &= A_{21} V_2 - A_{22} \left(\frac{-1}{A_{12}} V_1 + \frac{A_{11}}{A_{12}} V_2 \right) \\ &= \frac{A_{22}}{A_{12}} V_1 + \left(A_{21} - \frac{A_{22} A_{11}}{A_{12}} \right) V_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Comparando as eq. (2) e (3) com as equações que definem os parâmetros Y (ver eq. (4)) temos que:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{A_{22}}{A_{12}} \\ Y_{12} &= \left(A_{21} - \frac{A_{22} A_{11}}{A_{12}} \right) \\ Y_{21} &= \frac{-1}{A_{12}} \\ Y_{22} &= \frac{A_{11}}{A_{12}} \end{aligned}$$

- (b) Parâmetros Y \rightarrow parâmetros ABCD; Os parâmetros Y satisfazem este sistema de equações:

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 & [1] \\ I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 & [2] \end{cases} \quad (4)$$

Resolvendo a eq. [2] (do sistema de equações definido por (4)) em ordem a V_1 obtemos:

$$V_1 = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} V_2 + \frac{1}{Y_{21}} I_2 \quad (5)$$

Substituindo V_1 , dado por esta última eq., na eq. [1] do sistema de equações (4) temos:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} \left(-\frac{Y_{22}}{Y_{21}} V_2 + \frac{1}{Y_{21}} I_2 \right) + Y_{12} V_2 \\ &= \left(-Y_{11} \frac{Y_{22}}{Y_{21}} + Y_{12} \right) V_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}} I_2 \end{aligned} \quad (6)$$

Comparando as eq. (5) e (6) com as equações que definem os parâmetros ABCD (eq. (1)) temos que:

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \\ A_{12} &= -\frac{1}{Y_{21}} \\ A_{21} &= \left(-Y_{11} \frac{Y_{22}}{Y_{21}} + Y_{12} \right) \\ A_{22} &= -\frac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{aligned}$$

- (c) Parâmetros ABCD \rightarrow parâmetros Z; Resolvendo a eq. [2] do sistema de equações (1) em ordem a V_2 obtemos:

$$V_2 = \frac{1}{A_{21}} I_1 + \frac{A_{22}}{A_{21}} I_2 \quad (7)$$

Substituindo V_2 , obtido pela eq. anterior, na equação [1] de (1) temos:

$$\begin{aligned} V_1 &= A_{11} \left(\frac{1}{A_{21}} I_1 + \frac{A_{22}}{A_{21}} I_2 \right) - A_{12} I_2 \\ &= \frac{A_{11}}{A_{21}} I_1 + \left(\frac{A_{11} A_{22}}{A_{21}} - A_{12} \right) I_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Comparando as eq. (7) e (8) com as equações que definem os parâmetros Z temos que:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{A_{11}}{A_{21}} \\ Z_{12} &= \left(\frac{A_{11} A_{22}}{A_{21}} - A_{12} \right) \\ Z_{21} &= \frac{1}{A_{21}} \\ Z_{22} &= \frac{A_{22}}{A_{21}} \end{aligned}$$

- (d) Parâmetros Z \rightarrow parâmetros ABCD; Os parâmetros Z satisfazem o sistema de equações indicado

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 & [1] \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 & [2] \end{cases} \quad (9)$$

Resolvendo a eq. [2] (do sistema de equações definido por (9)) em ordem a I_1 obtemos

$$I_1 = \frac{1}{Z_{21}} V_2 - \frac{Z_{22}}{Z_{21}} I_2 \quad (10)$$

Substituindo I_1 , obtido pela eq. anterior, na equação [1] de (9) obtemos:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} \left(\frac{1}{Z_{21}} V_2 - \frac{Z_{22}}{Z_{21}} I_2 \right) + Z_{12} I_2 \\ &= \frac{Z_{11}}{Z_{21}} V_2 - \left(\frac{Z_{11} Z_{22}}{Z_{21}} - Z_{12} \right) I_2 \end{aligned} \quad (11)$$

Comparando as equações (10) e (11) com as equações que definem os parâmetros ABCD (eq. (1)) podemos escrever:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{Z_{11}}{Z_{21}} \\ A_{12} &= \left(\frac{Z_{11} Z_{22}}{Z_{21}} - Z_{12} \right) \\ A_{21} &= \frac{1}{Z_{21}} \\ A_{22} &= \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{aligned}$$

2. (a) *Circuito a*): A figura 1 a) mostra o circuito equivalente para $t < 0$. Dado que o condensador representa um circuito aberto para DC podemos afirmar que não flui corrente em R_1 para $t < 0$. A tensão aos terminais do condensador é a mesma existente aos terminais de R_2 em paralelo com R_3 :

$$\begin{aligned} v_C(t) &= I_s \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}, \quad (t < 0) \\ &= 1 \text{ V}, \quad (t < 0) \end{aligned}$$

A figura 1 a) mostra o circuito equivalente para $t \geq 0$. A tensão aos terminais do condensador $v_C(t)$ é a tensão aos terminais de R_2 em série com R_1 . Assim podemos escrever

$$i_C(t) = \frac{v_C(t)}{R_1 + R_2} = -C \frac{dv_C(t)}{dt}, \quad (t \geq 0) \quad (12)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{v_C(t)}{R_1 + R_2} &= -C \frac{dv_C(t)}{dt}, \quad (t \geq 0) \\ C \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R_1 + R_2} &= 0, \quad (t \geq 0) \end{aligned} \quad (13)$$

Esta última equação (equação diferencial linear de 1o. grau de coeficientes constantes e homogênea) tem a seguinte solução genérica:

$$v_C(t) = \alpha e^{\beta t}, \quad (t \geq 0)$$

Substituindo esta solução para $v_C(t)$ na equação 13 podemos escrever:

$$C \beta \alpha e^{\beta t} + \frac{\alpha e^{\beta t}}{R_1 + R_2} = 0 \quad (t \geq 0)$$

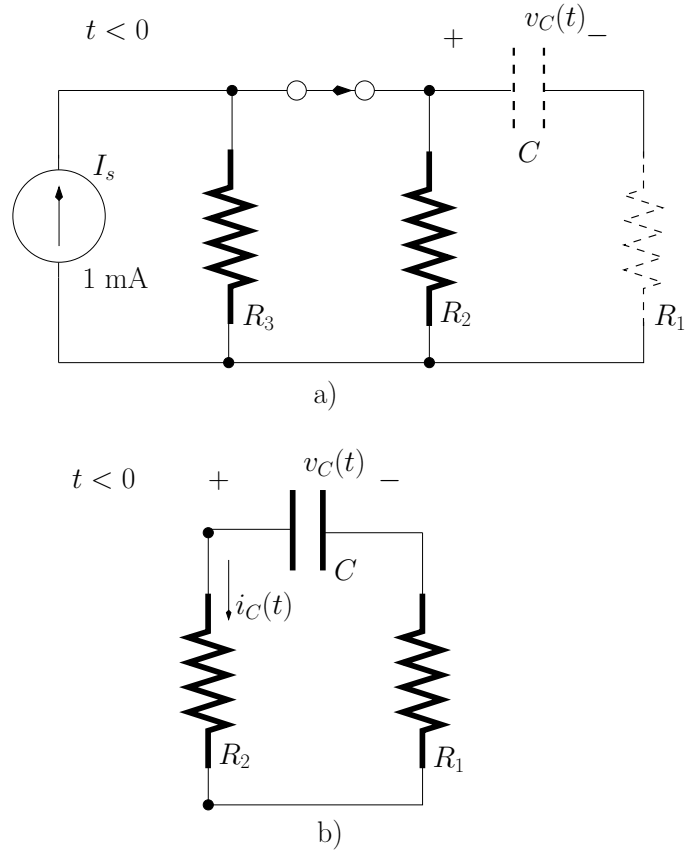


Figura 1: a) *circuito equivalente para $t < 0$* . b) *circuito equivalente para $t \geq 0$* .

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \alpha e^{\beta t} \left(C \beta + \frac{1}{R_1 + R_2} \right) &= 0 \quad (t \geq 0) \\
 \Leftrightarrow \left(C \beta + \frac{1}{R_1 + R_2} \right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \beta &= \frac{-1}{C(R_1 + R_2)}
 \end{aligned}$$

A constante α pode ser determinada atendendo a que:

$$\begin{aligned}
 v_C(t=0) &= I_s \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \\
 \Leftrightarrow \alpha e^{\beta t} \Big|_{t=0} &= I_s \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \\
 \Leftrightarrow \alpha &= I_s \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}
 \end{aligned}$$

A tensão aos terminais do condensador $v_C(t)$ pode ser descrita pela

seguinte equação:

$$v_C(t) = \begin{cases} I_s \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} & \text{para } t < 0 \\ I_s \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \exp\left(\frac{-t}{C(R_1 + R_2)}\right) & \text{para } t \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

A corrente $i_C(t)$ pode ser calculada de acordo com a equação (12), ou seja:

$$i_C(t) = I_s \frac{R_2 R_3}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_2)} e^{\frac{-t}{C(R_1 + R_2)}} \quad (t \geq 0)$$

e a tensão aos terminais de R_1 é dada por:

$$\begin{aligned} v_{R_1}(t) &= R_1 i_C(t) & (t \geq 0) \\ &= I_s \frac{R_1 R_2 R_3}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_2)} e^{\frac{-t}{C(R_1 + R_2)}} & (t \geq 0) \end{aligned}$$

A figura 2 a) mostra $v_C(t)$, $i_C(t)$ e $v_{R_1}(t)$.

- (b) *Circuito b*): A figura 3 a) mostra o circuito equivalente para $t < 0$. Dado que o condensador não conduz para $t < 0$ a diferença de potencial (tensão) aos terminais da resistência R_3 deve ser nula. Assim, a tensão aos terminais do condensador é:

$$v_C(t) = V_s \quad (t < 0)$$

A figura 3 b) mostra o circuito equivalente para $0 \leq t < t_o$. $t_o = 1$ ms. Note que este circuito é semelhante aquele apresentado na figura 1 b) da alínea anterior. Assim, a solução para a tensão aos terminais do condensador é obtida de forma semelhante, ou seja:

$$v_C(t) = \alpha e^{\beta t} \quad (0 \leq t < t_o) \quad (15)$$

em que $\alpha = V_s$ e $\beta = [C(R_3 + R_2)]^{-1}$. A corrente $i_C(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned} i_C(t) &= \frac{v_C(t)}{R_2 + R_3} & (0 \leq t < t_o) \\ &= \frac{V_s}{R_2 + R_3} e^{\frac{-t}{C(R_3 + R_2)}} & (0 \leq t < t_o) \end{aligned}$$

A corrente em R_1 é nula para este intervalo de tempo.

A figura 3 c) mostra o circuito equivalente para $t \geq t_o$. $t_o = 1$ ms. A tensão aos terminais do condensador, para $t = t_o$, é:

$$\begin{aligned} v_C(t = t_o) &= V_s e^{\frac{-t_o}{C(R_3 + R_2)}} \\ &= V'_{co} = 2 \text{ V} \end{aligned}$$

Note que esta é a condição inicial associada ao condensador quando o interruptor é fechado. Para o circuito da figura 3 c) podemos escrever:

$$i_C(t) = \frac{v_C(t)}{R_3 + (R_1 || R_2)} = -C \frac{dv_C(t)}{dt}, \quad (t \geq t_o) \quad (16)$$

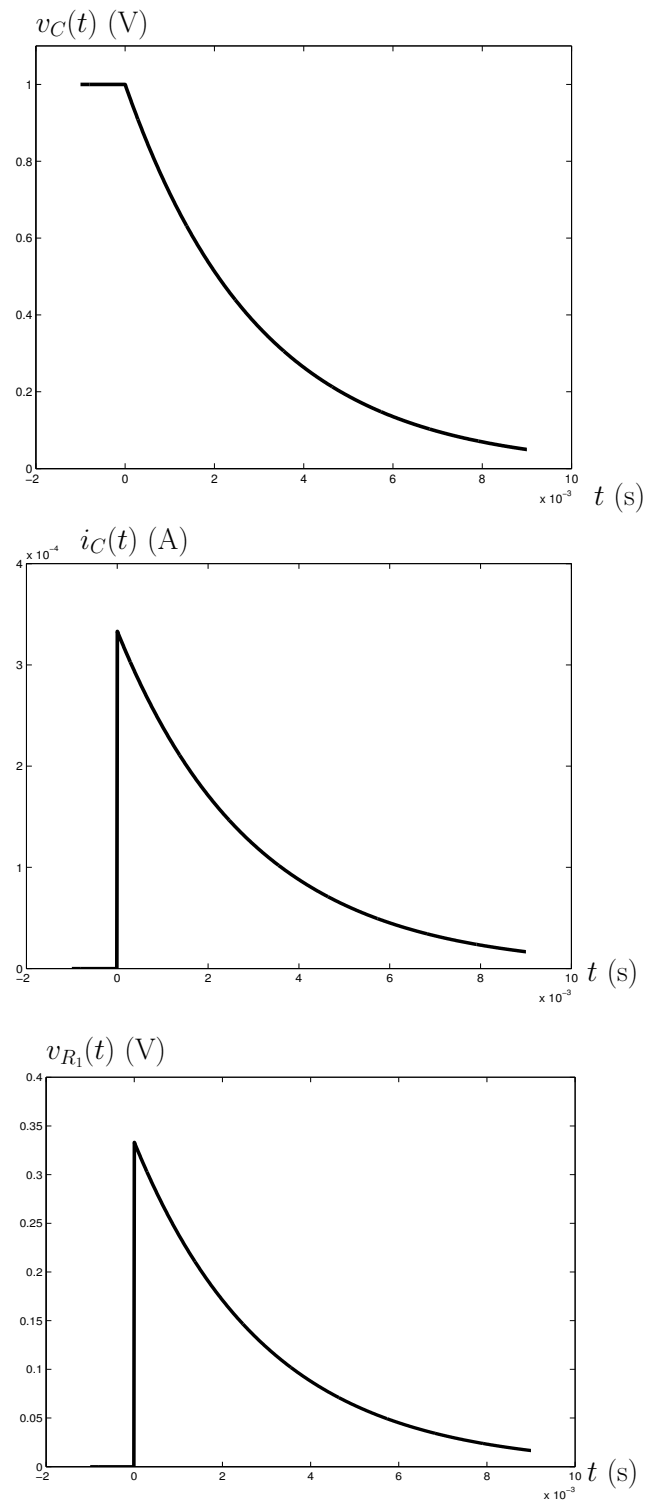


Figura 2: $v_C(t)$, $i_C(t)$ e $v_{R1}(t)$ em função do tempo.

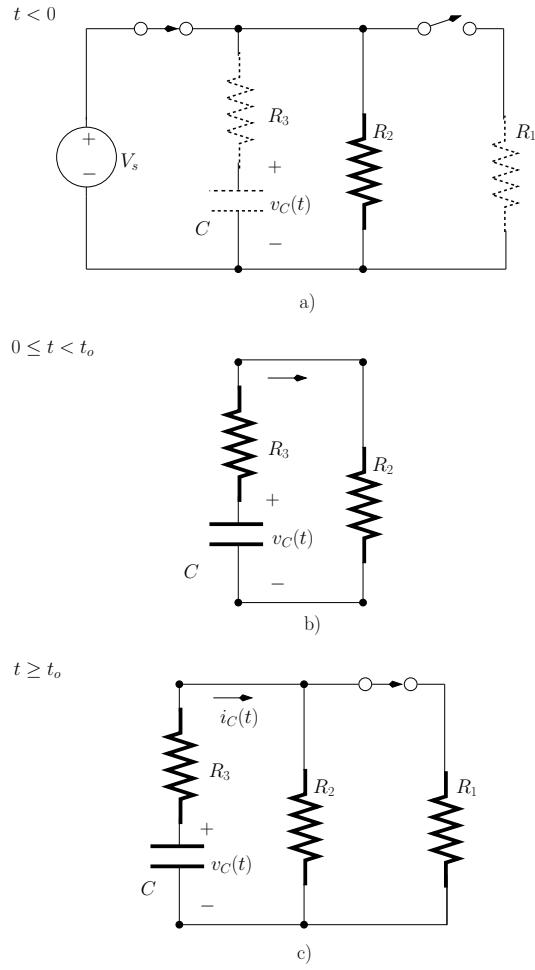


Figura 3: a) Circuito equivalente para $t < 0$. b) Circuito equivalente para $0 \leq t < t_o$. c) Circuito equivalente para $t \geq t_o$. $t_o = 1 \text{ ms}$.

A equação anterior pode ser manipulada da seguinte forma:

$$dt = -\tau' \frac{dv_C(t)}{v_C(t)} \quad (17)$$

com $\tau' = C[R_3 + (R_1 || R_2)]$. Integrando a equação anterior da seguinte forma

$$\int_{t_o}^t dt = -\tau' \int_{v_C(t_o)}^{v_C(t)} \frac{dv_C(t)}{v_C(t)}, \quad (t \geq t_o) \quad (18)$$

obtemos

$$\begin{aligned} t - t_o &= -\tau' (\ln[v_C(t)] - \ln[v_C(t_o)]), & (t \geq t_o) \\ &= -\tau' \ln \left(\frac{v_C(t)}{v_C(t_o)} \right), & (t \geq t_o) \end{aligned}$$

ou seja

$$v_C(t) = V'_{co} e^{\frac{-(t-t_o)}{C[R_3+(R_1||R_2)]}}, \quad (t \geq t_o)$$

A corrente $i_C(t)$ pode ser calculada da seguinte forma:

$$i_C(t) = \frac{v_C(t)}{R_3 + (R_1||R_2)}, \quad (t \geq t_o) \quad (19)$$

A tensão em R_1 é dada por:

$$v_{R_1}(t) = i_C(t) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

A figura 4 mostra $v_C(t)$, $i_C(t)$ e $v_{R_1}(t)$.

3. Circuitos RL.

(a) *Circuito a*): A figura 5 a) mostra o circuito equivalente para $t < 0$.

Para DC o indutor é um curto-circuito pelo que a tensão V_s está aplicada aos terminais de R_1 e também aos terminais de R_2 . Assim a corrente que flui através de L é dada por:

$$i_L(t) = \frac{V_s}{R_2}, \quad (t < 0)$$

A figura 5 b) mostra o circuito equivalente para $t \geq 0$. Para este circuito podemos observar que a tensão $v_L(t)$ é a tensão aos terminais de R_1 em série com R_2 . Assim, que podemos escrever:

$$v_L(t) = -i_L(t) (R_1 + R_2), \quad (t \geq 0)$$

ou seja

$$\begin{aligned} L \frac{di_L(t)}{dt} &= -i_L(t) (R_1 + R_2), & (t \geq 0) \\ \Leftrightarrow L \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) (R_1 + R_2) &= 0, & (t \geq 0) \end{aligned} \quad (20)$$

A solução geral para esta equação é;

$$i_L(t) = \alpha e^{\beta t}, \quad (t \geq 0)$$

Substituindo esta expressão na equação 20 temos:

$$\begin{aligned} \alpha e^{\beta t} (L\beta + R_1 + R_2) &= 0, & (t \geq 0) \\ \Leftrightarrow \beta &= -\frac{R_1 + R_2}{L} \end{aligned}$$

A constante α pode ser obtida através da condição inicial associada ao indutor, ou seja:

$$\begin{aligned} i_L(t=0) &= \frac{V_s}{R_2} \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{V_s}{R_2} \end{aligned}$$

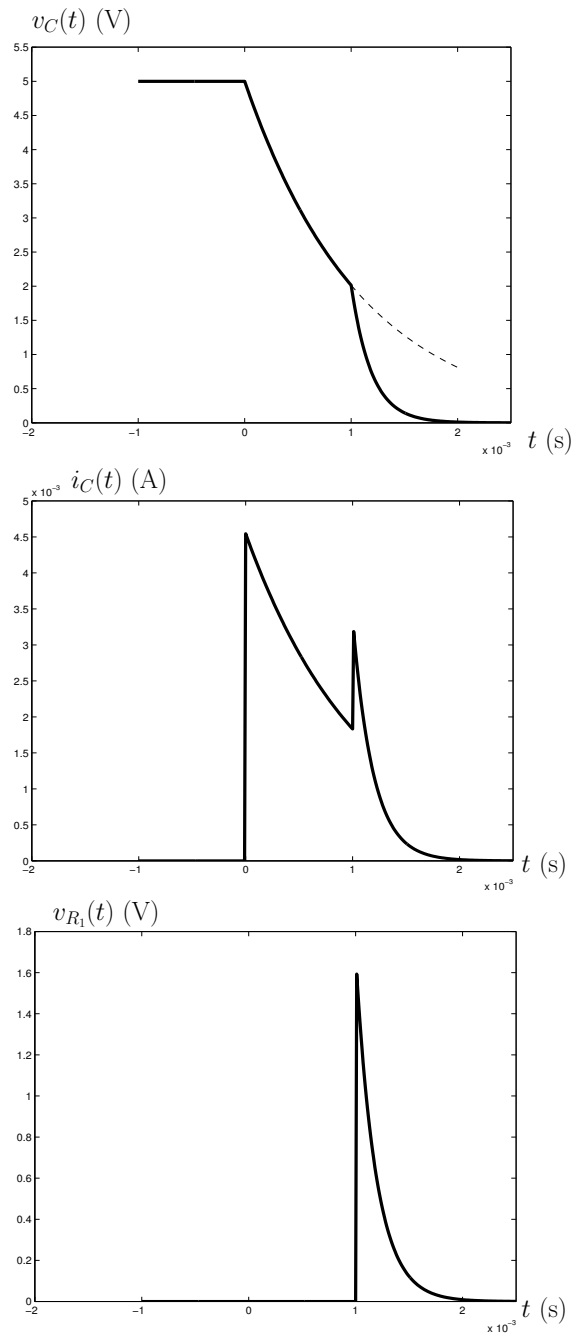


Figura 4: $v_C(t)$, $i_C(t)$ e $v_{R_1}(t)$ em função do tempo.

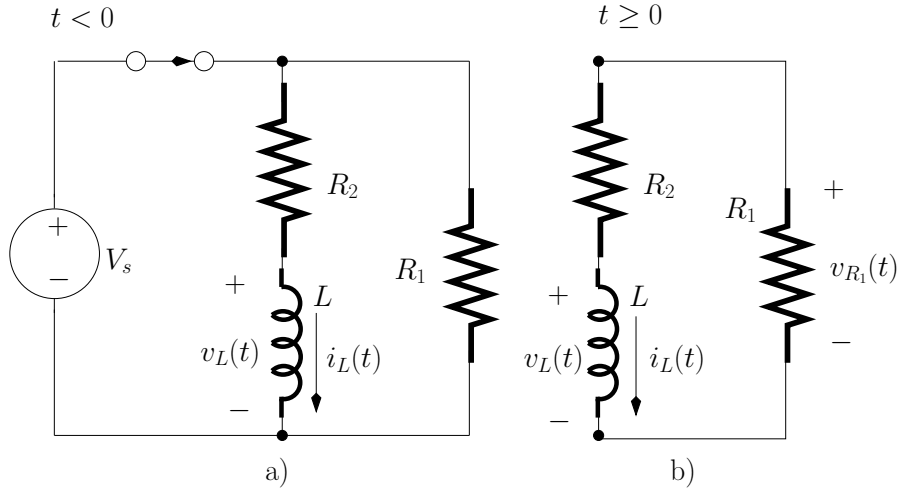


Figura 5: a) Circuito equivalente para $t < 0$. b) Circuito equivalente para $t \geq 0$.

A tensão $v_L(t)$ pode ser obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} v_L(t) &= -i_L(t) (R_1 + R_2), \quad (t \geq 0) \\ &= -\frac{V_s}{R_2} (R_1 + R_2) e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t}, \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

e a tensão aos terminais de R_1 é:

$$v_{R_1}(t) = v_L(t) \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad (t \geq 0)$$

A figura 6 mostra $i_L(t)$, $v_L(t)$ e $v_{R_1}(t)$.

- (b) *Circuito b*): A figura 7 a) mostra o circuito equivalente para $t < 0$. Dado que o indutor representa um curto-circuito para DC, a tensão V_s está aplicada a R_2 e a corrente que flui no indutor é:

$$i_L(t) = \frac{V_s}{R_2}, \quad (t < 0)$$

A figura 7 b) mostra o circuito equivalente para $t \geq 0$. para este circuito podemos escrever:

$$v_L(t) = -i_L(t) R_1, \quad (t \geq 0)$$

ou seja

$$\begin{aligned} L \frac{di_L(t)}{dt} &= -i_L(t) R_1, \quad (t \geq 0) \\ \Leftrightarrow L \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) R_1 &= 0, \quad (t \geq 0) \end{aligned} \quad (21)$$

A solução geral para esta equação é;

$$i_L(t) = \alpha e^{\beta t}, \quad (t \geq 0)$$

Substituindo esta expressão na equação (21) temos:

$$\begin{aligned}\alpha e^{\beta t} (L \beta + R_1) &= 0, & (t \geq 0) \\ \Leftrightarrow \quad \beta &= -\frac{R_1}{L}\end{aligned}$$

A constante α pode ser obtida através da condição inicial associada ao indutor, ou seja:

$$\begin{aligned}i_L(t=0) &= \frac{V_s}{R_2} \\ \Leftrightarrow \quad \alpha &= \frac{V_s}{R_2}\end{aligned}$$

A tensão $v_L(t)$ pode ser obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}v_L(t) &= -i_L(t) R_1, & (t \geq 0) \\ &= -\frac{V_s}{R_2} R_1 e^{-\frac{R_1}{L} t}, & (t \geq 0)\end{aligned}$$

e a tensão aos terminais de R_1 é igual a $v_L(t)$. A figura 8 mostra $i_L(t)$ e $v_L(t)$.

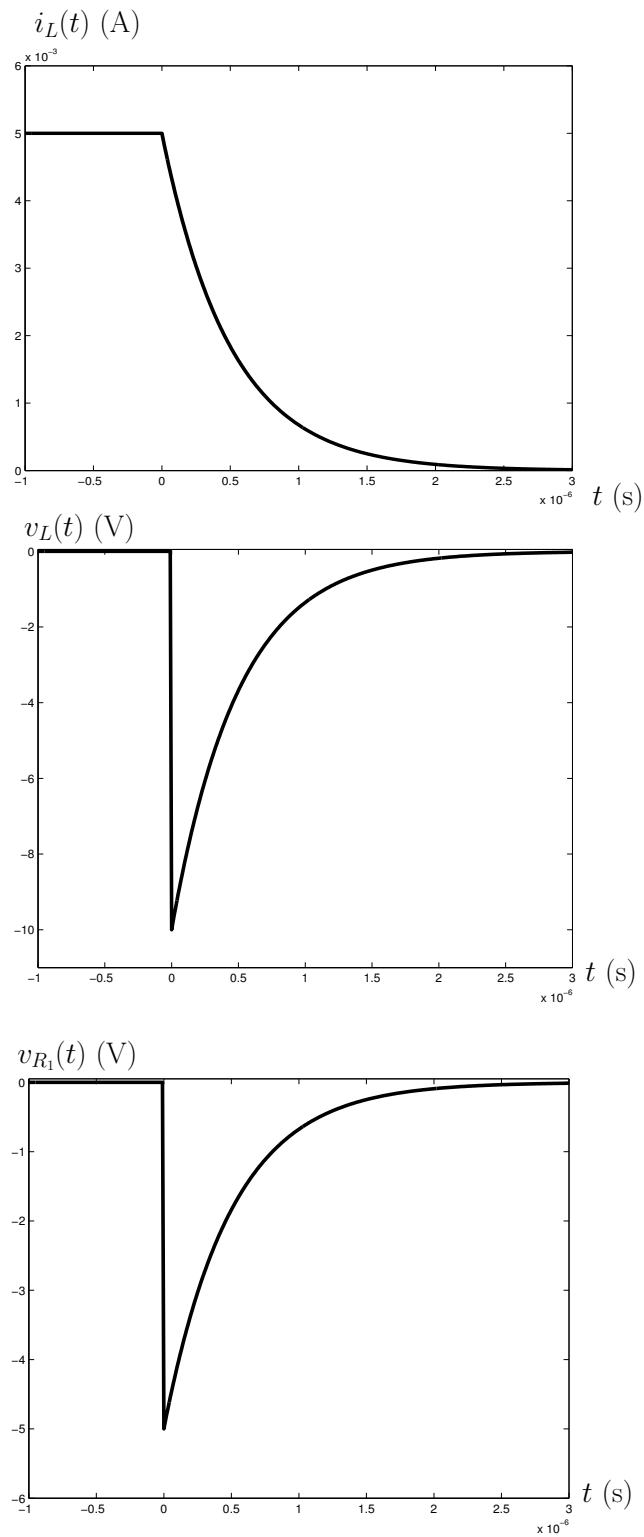


Figura 6: $i_L(t)$, $v_L(t)$ e $v_{R_1}(t)$ em função do tempo.

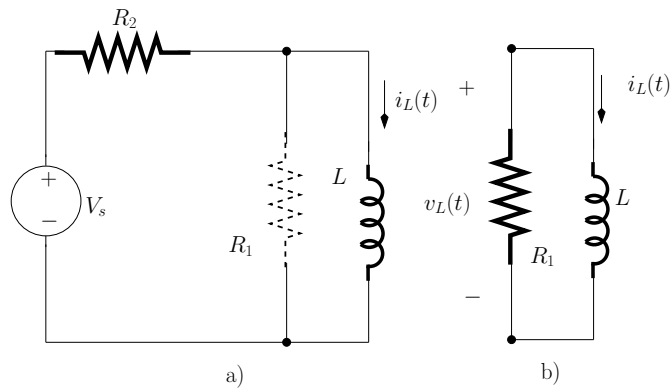


Figura 7: a) Circuito equivalente para $t < 0$. b) Circuito equivalente para $t \geq 0$.

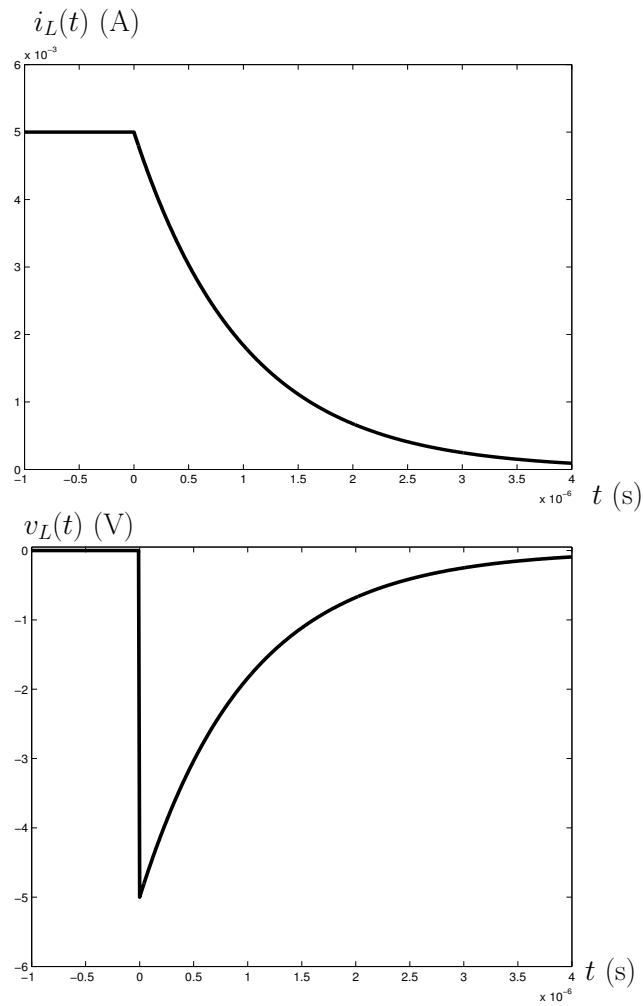


Figura 8: $i_L(t)$ e $v_L(t)$ em função do tempo.