

### Resolução da Folha de exercícios N.º 7

1. Resolvemos os circuitos deste problema usando a notação fasorial. Para estes circuitos podemos relacionar a tensão de saída  $V_O$  com a tensão de entrada  $V_S$  usando a fórmula do divisor de tensão.

- *Circuito a)*: Para este circuito podemos escrever:

$$V_O = \frac{R}{R + Z_L} V_S$$

$Z_L$  é a impedância associada ao indutor:

$$Z_L = j \omega L$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{V_O}{V_S} \\ &= \frac{R}{R + j \omega L} \end{aligned}$$

ou, em alternativa,

$$H(f) = \frac{R}{R + j 2 \pi f L}$$

A frequência de corte,  $f_c$ , satisfaz a equação seguinte:

$$|H_{dB}(f_c)| = -3 \text{ dB} \quad (1)$$

em que:

$$|H_{dB}(f)| = 20 \log_{10} |H(f)|$$

Dado que  $-3 \text{ dB}$  corresponde a  $1/\sqrt{2}$ , ou seja:

$$20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} = -3$$

então a eq. 1 pode ser re-escrita da seguinte forma:

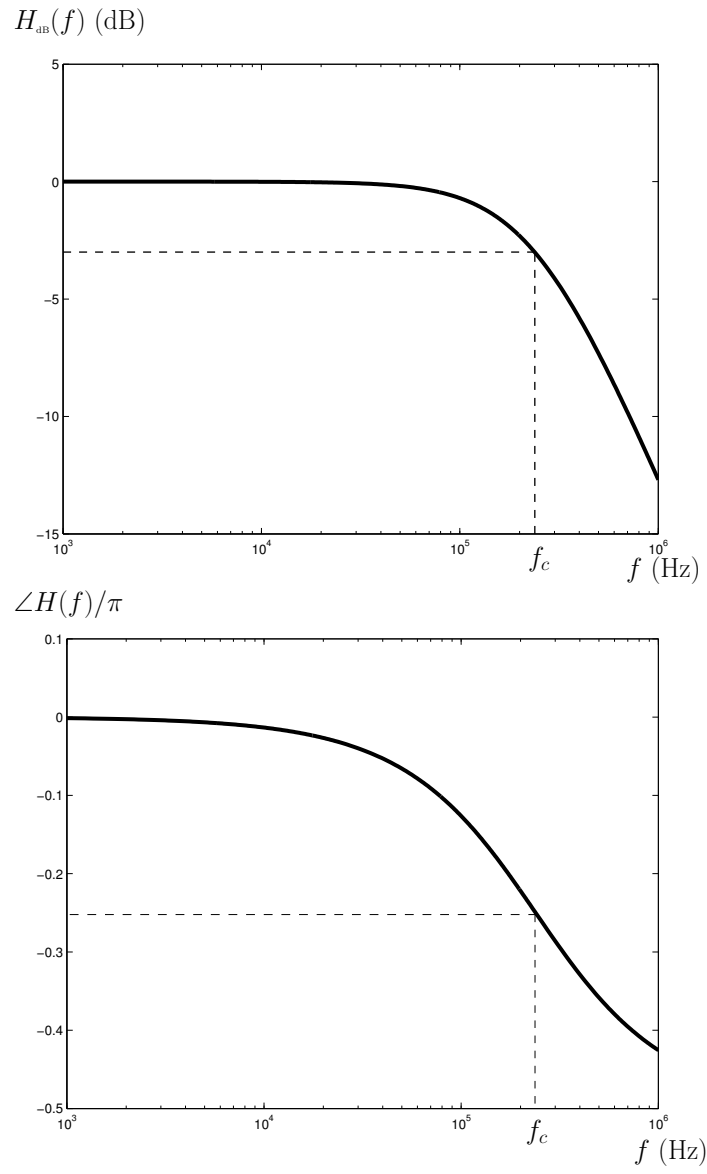
$$|H(f_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{R}{\sqrt{R^2 + (2 \pi f_c L)^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{R^2}{R^2 + (2 \pi f_c L)^2} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow f_c &= \frac{1}{2 \pi \tau} \\ \Leftrightarrow f_c &= 238.7 \text{ kHz} \end{aligned}$$

em que  $\tau = L/R$ .

A figura 1 mostra o diagrama de Bode da função de transferência.

Figura 1: *Diagrama de Bode.*

- *Circuito b)*: Para este circuito podemos escrever:

$$V_O = \frac{Z_{R_2 C}}{R_1 + Z_{R_2 C}} V_S$$

em que  $Z_{R_2 C}$  é a impedância resultante do paralelo de  $R_2$  com  $(\omega C)^{-1}$ , ou seja,:

$$Z_{R_2 C} = \frac{R_2}{1 + j \omega C R_2}$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{V_O}{V_S} \\ &= \frac{R_2}{R_2 + R_1} \times \frac{1}{1 + j \omega C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \end{aligned}$$

Alternativamente podemos escrever

$$H(f) = \frac{R_2}{R_2 + R_1} \times \frac{1}{1 + j 2 \pi f C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

A frequência de corte,  $f_c$ , satisfaz a equação seguinte:

$$|H_{dB}(f_c)| = 20 \log_{10} \left( \frac{R_2}{R_2 + R_1} \right) - 3 \text{ dB} \quad (2)$$

Esta equação pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$|H(f_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{R_2}{R_2 + R_1}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{R_2 + R_1} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \left( 2 \pi f_c C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)^2}} &= \frac{R_2}{R_2 + R_1} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1 + (2 \pi f_c \tau)^2} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow f_c &= \frac{1}{2 \pi \tau} \\ \Leftrightarrow f_c &= 1.6 \text{ kHz} \end{aligned}$$

em que  $\tau = C (R_1 || R_2)$ .

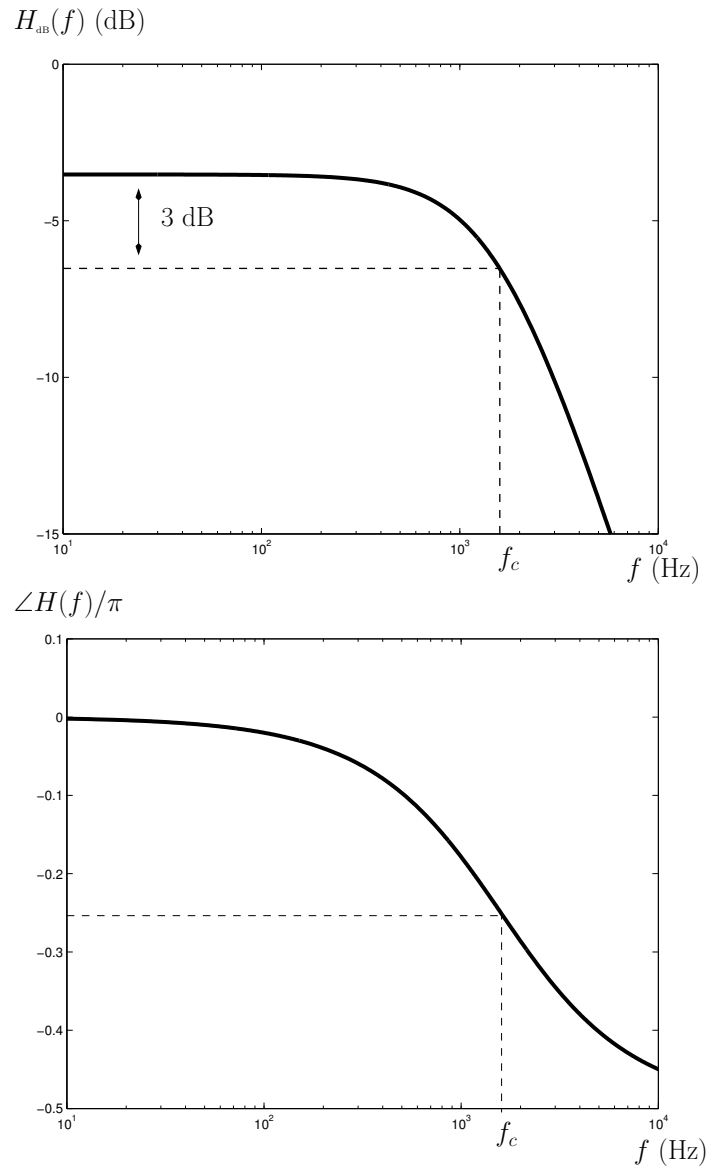
A figura 2 mostra o diagrama de Bode da função de transferência.

- *Circuito c)*: Para este circuito podemos escrever:

$$V_O = \frac{Z_C}{Z_{R_3 L} + Z_C} V_S$$

em que  $Z_{R_3 L}$  é a impedância resultante da série de  $R_3$  com  $j \omega L$ , ou seja,:

$$Z_{R_3 L} = R_3 + j \omega L$$

Figura 2: *Diagrama de Bode.*

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{V_O}{V_S} \\ &= \frac{1}{1 + j\omega C R_3 + (j\omega)^2 L C} \end{aligned}$$

Esta função de transferência é de segunda ordem e pode ser escrita de acordo com a seguinte forma canónica:

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + j\omega 2\eta\omega_n + (j\omega)^2}$$

$\omega_n$  designa-se por *frequência natural* e  $\eta$  é o *amortecimento*. Para o circuito em causa temos que

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= 100 \text{ krad/s} \\ \eta &= \frac{1}{2} R_3 \sqrt{\frac{C}{L}} \\ &= 0.25 \Leftarrow R_3 = 50 \Omega \\ &= 1 \Leftarrow R_3 = 200 \Omega \\ &= 5 \Leftarrow R_3 = 1000 \Omega \end{aligned}$$

Quando  $\eta < 1$  o sistema (ou circuito) diz-se *sub-amortecido*. Quando  $\eta > 1$  o sistema diz-se *sobre-amortecido* e se  $\eta = 1$  diz-se que o amortecimento é *crítico*. A frequência de corte,  $f_c$ , satisfaz a equação seguinte:

$$|H_{dB}(f_c)| = -3 \text{ dB} \quad (3)$$

Esta equação pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$|H(f_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

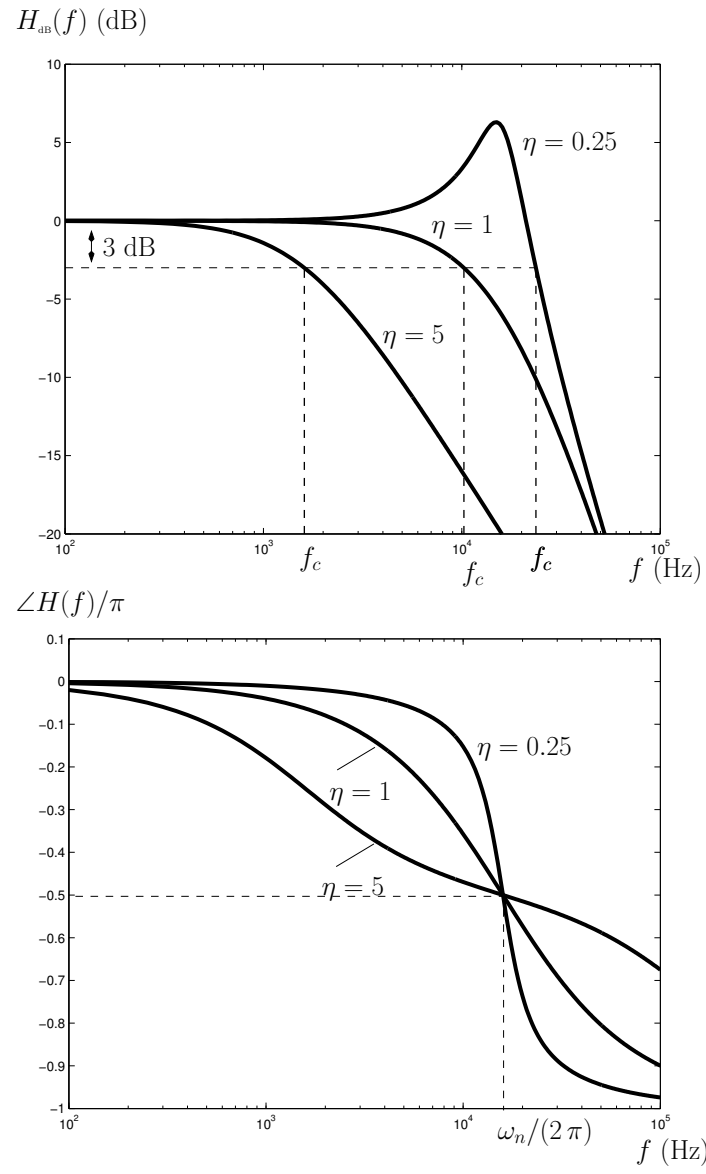
ou seja,

$$\left. \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (\omega 2\eta\omega_n)^2}} \right|_{\omega=2\pi f_c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Resolvendo esta equação em ordem a  $f_c$  obtemos a frequência de corte:

$$\begin{aligned} f_c &= \frac{\omega_n}{2\pi} \sqrt{1 - 2\eta^2 + \sqrt{2 - 4\eta^2 + 4\eta^4}} \\ &= 23.6 \text{ kHz} \Leftarrow R_3 = 50 \Omega \\ &= 10.2 \text{ kHz} \Leftarrow R_3 = 200 \Omega \\ &= 1.6 \text{ kHz} \Leftarrow R_3 = 1000 \Omega \end{aligned}$$

A figura 3 mostra o diagrama de Bode da função de transferência.

Figura 3: *Diagrama de Bode.*

2. Para este circuito podemos escrever:

$$V_O = I_S Z_{eq} \quad (4)$$

em que  $Z_{eq}$  é dado por:

$$Z_{eq} = (j\omega L) \parallel (j\omega C)^{-1} \parallel R \quad (5)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{V_O}{I_S} \\ &= Z_{eq} \\ &= \frac{j\omega L R}{R + j\omega L + (j\omega)^2 L C R} \end{aligned}$$

Esta função de transferência é de segunda ordem e pode ser escrita de acordo com a seguinte forma canónica:

$$H(\omega) = \frac{1}{C} \frac{j\omega}{\omega_n^2 + j\omega 2\eta\omega_n + (j\omega)^2}$$

em que

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{1}{LC} \\ &= 64.6 \text{ krad/s} \\ \eta &= \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} \\ &= 0.044 \end{aligned}$$

A figura 4 mostra o diagrama de Bode da função de transferência. É interessante verificar que para frequências inferiores a  $\omega_n/(2\pi)$  a função de transferência tem um carácter indutivo e que para frequências superiores a  $\omega_n/(2\pi)$  a função de transferência tem um carácter capacitivo.

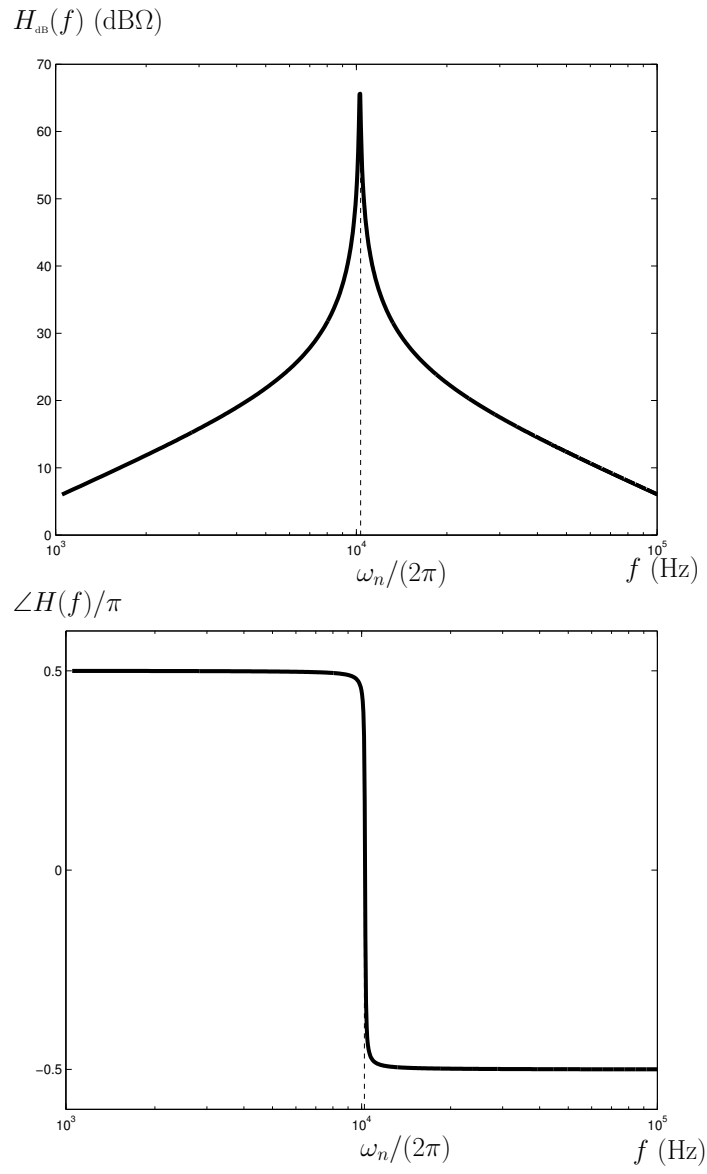
3. Cálculos dos parâmetros admitância.

- *Circuito a)*: A figura 5 a) mostra o circuito equivalente para o cálculo de  $Y_{11}$  e de  $Y_{21}$ . Note que o porto 2 está em curto-circuito, ou seja  $V_2 = 0$ . Assim a tensão  $V_1$  está aplicada aos terminais de  $L$ ;

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_1}{j\omega L} \\ I_2 &= -I_1 \end{aligned}$$

pelo que podemos escrever:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \\ &= \frac{1}{j\omega L} \\ Y_{21} &= \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \\ &= -\frac{1}{j\omega L} \end{aligned}$$

Figura 4: *Diagrama de Bode.*



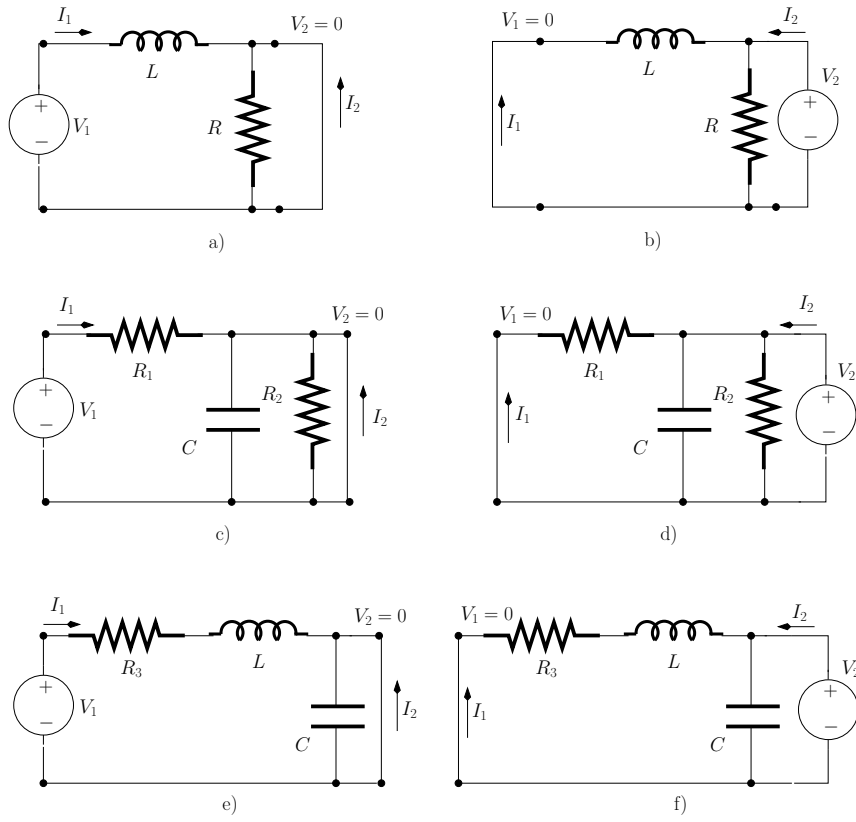


Figura 5: Cálculos dos parâmetros admitância.

A figura 5 b) mostra o circuito equivalente para o cálculo de  $Y_{12}$  e de  $Y_{22}$ . Agora o porto 1 está em curto-circuito, ou seja  $V_1 = 0$ . Assim a tensão  $V_2$  está aplicada aos terminais de  $L$  e aos terminais de  $R$ ;

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{V_2}{j\omega L} \\ I_2 &= \frac{V_2}{j\omega L} + \frac{V_2}{R} \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} Y_{12} &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \\ &= -\frac{1}{j\omega L} \\ Y_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \\ &= \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R} \end{aligned}$$

- *Circuito b)*: A figura 5 c) mostra o circuito equivalente para o cálculo de  $Y_{11}$  e de  $Y_{21}$ . O porto 2 está em curto-circuito, ou seja  $V_2 = 0$ . A tensão  $V_1$  está aplicada aos terminais de  $R_1$ ;

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_1}{R_1} \\ I_2 &= -I_1 \end{aligned}$$

pelo que podemos escrever:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \\ &= \frac{1}{R_1} \\ Y_{21} &= \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \\ &= -\frac{1}{R_1} \end{aligned}$$

A figura 5 d) mostra o circuito equivalente para o cálculo de  $Y_{12}$  e de  $Y_{22}$ . O porto 1 está em curto-circuito, ou seja  $V_1 = 0$  e a tensão  $V_2$  está aplicada aos terminais de  $R_2$ , aos terminais de  $R_1$  e também aos terminais de  $C$ ;

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{V_2}{R_1} \\ I_2 &= j\omega C V_2 + \frac{V_2}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} \end{aligned}$$

ou seja

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{R_1} \\
Y_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \\
&= j\omega C + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}
\end{aligned}$$

- *Circuito c):* A figura 5 e) mostra o circuito equivalente para o cálculo de  $Y_{11}$  e de  $Y_{21}$ . O porto 2 está em curto-circuito, ou seja  $V_2 = 0$ . A tensão  $V_1$  está aplicada aos terminais da impedância constituída pela série de  $R_3$  com  $L$ ;

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{V_1}{R_3 + j\omega L} \\
I_2 &= -I_1
\end{aligned}$$

pelo que podemos escrever:

$$\begin{aligned}
Y_{11} &= \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \\
&= \frac{1}{R_3 + j\omega L} \\
Y_{21} &= \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \\
&= -\frac{1}{R_3 + j\omega L}
\end{aligned}$$

A figura 5 e) mostra o circuito equivalente para o cálculo de  $Y_{12}$  e de  $Y_{22}$ . O porto 1 está em curto-circuito, ou seja  $V_1 = 0$ . A tensão  $V_2$  está aplicada aos terminais de  $C$  e aos terminais da impedância constituída pela série de  $R_3$  com  $L$ ;

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{V_2}{R_3 + j\omega L} \\
I_2 &= j\omega C V_2 + \frac{V_2}{R_3 + j\omega L}
\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
Y_{12} &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \\
&= -\frac{1}{R_3 + j\omega L} \\
Y_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \\
&= j\omega C + \frac{1}{R_3 + j\omega L}
\end{aligned}$$