

## Resolução da Folha de exercícios N.º 5

1. Resolvemos os circuitos da figura 1 usando o método da análise Nodal com fasores.

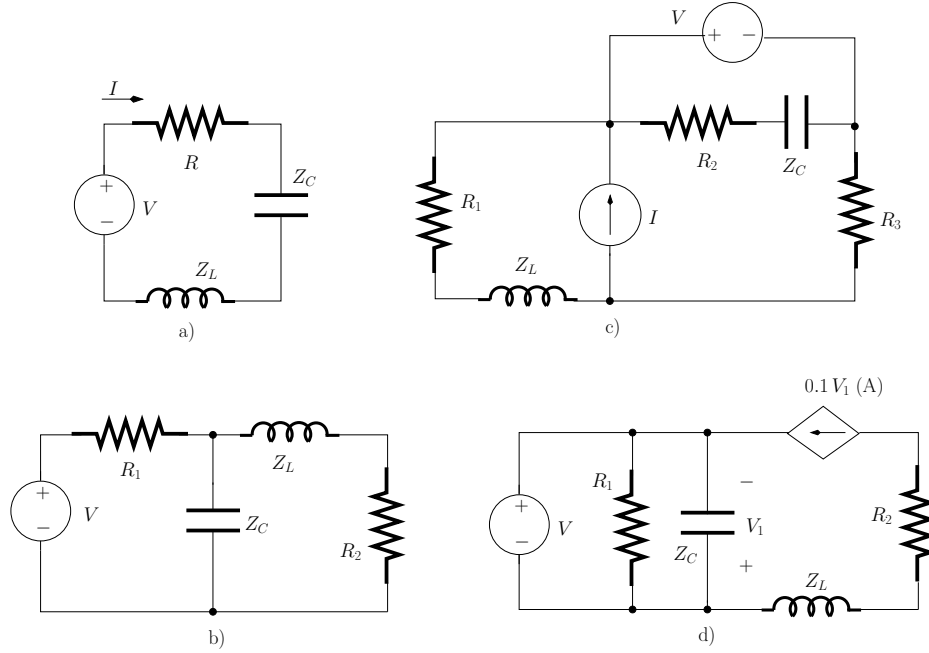


Figura 1: Circuitos do problema 2.

- *Circuito a)*: As impedâncias do condensador,  $Z_C$ , e da bobina,  $Z_L$ , são dadas por:

$$\begin{aligned}
 Z_C &= \frac{1}{j\omega C} \Big|_{\omega=30 \text{ krad/s}} \\
 &= -j 37.04 \, \Omega \\
 Z_L &= j\omega L \Big|_{\omega=30 \text{ krad/s}} \\
 &= j 90.0 \, \Omega
 \end{aligned}$$

O fasor (estático) associado à fonte de tensão é  $V = 10 \exp(j\pi/4)$  V. Dado que  $R$  está em série com  $C$  e com  $L$  podemos determinar a corrente  $I$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{V}{Z_L + Z_C + R} \\
 &= \frac{10 e^{j\pi/4}}{j 90 - j 37.04 + 100} \\
 &= 88.4 e^{j 0.30} \text{ mA}
 \end{aligned}$$

A tensão aos terminais da resistência é dada por:

$$\begin{aligned} V_R &= R I \\ &= 8.84 e^{j 0.30} \text{ V} \end{aligned}$$

A tensão aos terminais do condensador,  $V_C$ , é dada por:

$$\begin{aligned} V_Z &= Z_C I \\ &= 3.27 e^{j 0.30 - j \pi/2} \text{ V} \\ &= 3.27 e^{-j 1.27} \text{ V} \end{aligned}$$

A tensão aos terminais da bobina,  $V_L$ , é dada por:

$$\begin{aligned} V_Z &= Z_L I \\ &= 7.95 e^{j 0.30 + j \pi/2} \text{ V} \\ &= 7.95 e^{j 1.87} \text{ V} \end{aligned}$$

Note que, tal como é esperado, a tensão aos terminais da resistência está em fase com a corrente, ou seja, a diferença de fase entre a tensão e a corrente é nula. Por outro lado, a tensão aos terminais do condensador apresenta um atraso de fase de  $\pi/2$  em relação à corrente enquanto que a tensão aos terminais da bobina apresenta um avanço de fase de  $\pi/2$  em relação à corrente.

- *Circuito b)*: As impedâncias do condensador e da bobina podem ser

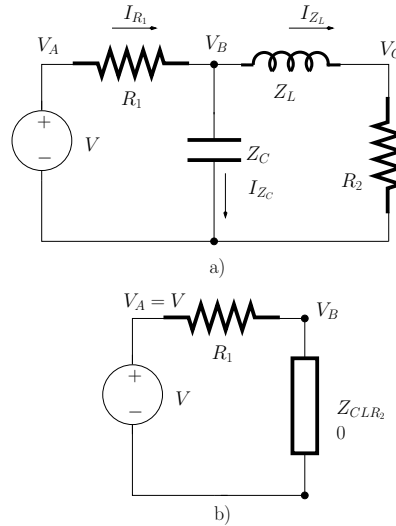


Figura 2: a) *Circuito (b) da figura 1.* b) *Circuito equivalente.*

calculadas como se segue:

$$\begin{aligned} Z_C &= \frac{1}{j \omega C} \Big|_{\omega=30 \text{ krad/s}} \\ &= -j166.7 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_L &= j\omega L \Big|_{\omega=30 \text{ krad/s}} \\
 &= j300.0 \, \Omega
 \end{aligned}$$

Da figura 2 a) observamos que a série de  $R_2$  com  $Z_L$  está ligada em paralelo com  $Z_C$ . Assim podemos obter uma impedância equivalente:

$$\begin{aligned}
 Z_{CLR_2} &= Z_C || (Z_L + R_2) \\
 &= 77.3 - j201.0 \, \Omega
 \end{aligned}$$

Da figura 2 b) podemos observar que  $R_1$  e  $Z_{CLR_2}$  formam um divisor de tensão tal que:

$$\begin{aligned}
 V_B &= V \frac{Z_{CLR_2}}{Z_{CLR_2} + R_1} \\
 &= 1.97 e^{-j0.23} \text{ V}
 \end{aligned}$$

Da figura 2 a) também observamos que  $Z_L$  e  $R_2$  formam um divisor de tensão que permite relacionar  $V_C$  com  $V_B$  da maneira seguinte:

$$\begin{aligned}
 V_C &= V_B \frac{R_2}{Z_L + R_2} \\
 &= 1.39 e^{-j1.02} \text{ V}
 \end{aligned}$$

Podemos calcular a corrente em cada elemento tal como se mostra seguidamente:

$$\begin{aligned}
 I_{R_1} &= \frac{V - V_B}{R_1} \\
 &= 9.1 e^{j0.97} \text{ mA} \\
 I_{Z_C} &= \frac{V_B}{Z_C} \\
 &= 11.8 e^{j1.34} \text{ mA} \\
 I_{Z_L} &= \frac{V_B - V_C}{Z_L} \\
 &= 4.6 e^{-j1.02} \text{ mA} \\
 I_{R_2} &= I_{Z_L}
 \end{aligned}$$

- *Circuito c)*: As impedâncias do condensador e da bobina são dadas por:

$$\begin{aligned}
 Z_C &= \frac{1}{j\omega C} \Big|_{\omega=30 \text{ krad/s}} \\
 &= -j47.6 \, \Omega \\
 Z_L &= j\omega L \Big|_{\omega=30 \text{ krad/s}} \\
 &= j150 \, \Omega
 \end{aligned}$$

Dado que  $R_1$  está em série com  $Z_L$  e  $R_2$  está em série com  $Z_C$  podemos obter um circuito equivalente tal como se mostra na figura

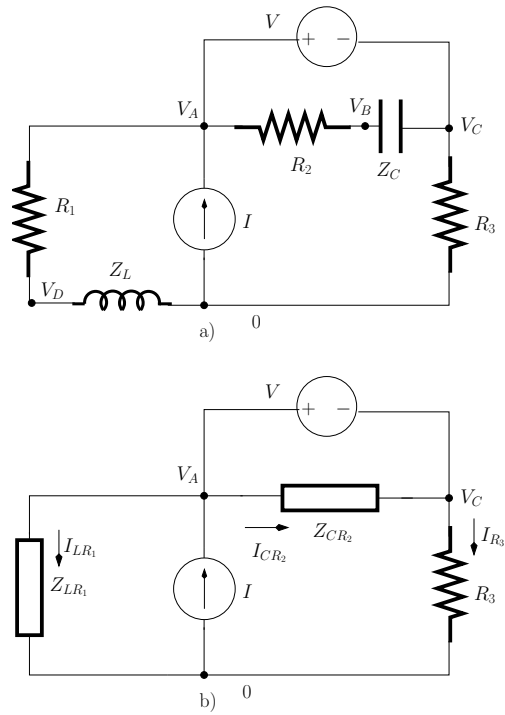


Figura 3: a) Circuito (c) da figura 1. b) Circuito equivalente.

3 b) com

$$\begin{aligned}
 Z_{LR_1} &= Z_L + R_1 \\
 &= 250 + j 150 \, \Omega \\
 Z_{CR_2} &= Z_C + R_2 \\
 &= 200 - j 47.6 \, \Omega
 \end{aligned}$$

Para este circuito podemos escrever os conjunto de equações que se apresenta seguidamente:

$$\begin{cases} I_{LR_1} + I_{R_3} = I \\ V_A - V_C = V \end{cases} \quad (1)$$

ou seja:

$$\begin{cases} \frac{V_A}{Z_{LR_1}} + \frac{V_C}{R_3} = I \\ V_A - V_C = V \end{cases} \quad (2)$$

Resolvendo em ordem a  $V_A$  e  $V_C$  obtemos:

$$\begin{aligned}
 V_A &= Z_{LR_1} \frac{V + I R_3}{R_3 + Z_{LR_1}} \\
 &= 27.38 e^{j 1.26} \, \text{V}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_C &= R_3 \frac{I Z_{LR_1} - V}{R_3 + Z_{LR_1}} \\
 &= 19.05 e^{j 1.50} \text{ V}
 \end{aligned}$$

A corrente que flui através de  $C$  e  $R_2$  é dada por:

$$\begin{aligned}
 I_{CR_2} &= \frac{V_A - V_C}{Z_{CR_2}} \\
 &= \frac{V}{Z_{CR_2}} \\
 &= 48.6 e^{j 1.02} \text{ mA}
 \end{aligned}$$

e a corrente que flui através de  $L$  e  $R_1$  é dada por:

$$\begin{aligned}
 I_{LR_1} &= \frac{V_A}{Z_{LR_1}} \\
 &= 93.9 e^{j 0.72} \text{ mA}
 \end{aligned} \tag{3}$$

A corrente que flui através de  $R_3$  é dada por:

$$\begin{aligned}
 I_{R_3} &= \frac{V_C}{R_3} \\
 &= 68.0 e^{j 1.50} \text{ mA}
 \end{aligned}$$

As tensões aos terminais de  $R_2$  e de  $C$  são dadas por:

$$\begin{aligned}
 V_{R_2} &= I_{CR_2} R_2 \\
 &= 9.73 e^{j 1.02} \text{ V} \\
 V_{Z_C} &= I_{CR_2} Z_C \\
 &= 2.32 e^{-j 0.55} \text{ V}
 \end{aligned}$$

As tensões aos terminais de  $R_1$  e de  $L$  são dadas por:

$$\begin{aligned}
 V_{R_1} &= I_{LR_1} R_1 \\
 &= 23.48 e^{j 0.72} \text{ V} \\
 V_{Z_L} &= I_{LR_1} Z_L \\
 &= 14.09 e^{j 2.29} \text{ V}
 \end{aligned}$$

- *Circuito d)*: As impedâncias do condensador e da bobina podem ser calculadas como se segue:

$$\begin{aligned}
 Z_C &= \frac{1}{j \omega C} \Big|_{\omega=30 \text{ krad/s}} \\
 &= -j 33.3 \text{ } \Omega \\
 Z_L &= j \omega L \Big|_{\omega=30 \text{ krad/s}} \\
 &= j 180 \text{ } \Omega
 \end{aligned}$$

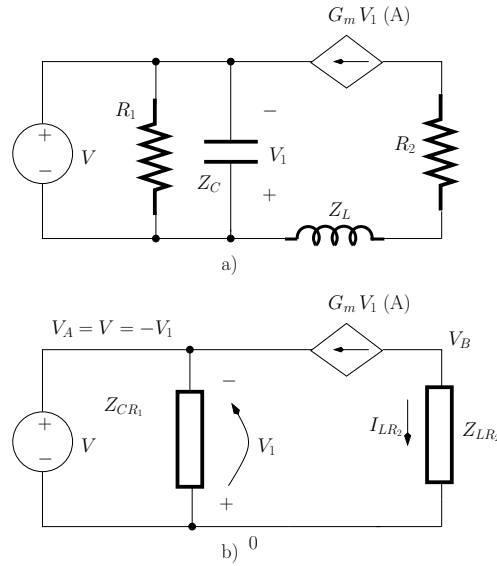


Figura 4: a) Circuito (d) da figura 1. b) Circuito equivalente.

Dado que  $R_1$  está em paralelo com  $Z_C$  e  $R_2$  está em série com  $Z_L$  podemos obter o circuito equivalente que se mostra na figura 4 b) com

$$\begin{aligned} Z_{CR_1} &= \frac{Z_C R_1}{Z_C + R_1} \\ &= 0.85 - j 33.31 \, \Omega \\ Z_{LR_2} &= Z_L + R_2 \\ &= 800 + j 180 \, \Omega \end{aligned}$$

Para este circuito podemos escrever:

$$I_{LR_2} + G_m V_1 = 0$$

dado que  $V_1 = -V$  podemos escrever esta última equação deste modo:

$$\frac{V_B}{Z_{LR_2}} - G_m V = 0$$

ou seja

$$\begin{aligned} V_B &= Z_{LR_2} G_m V \\ &= 820.0 e^{j 1.01} \, \text{V} \end{aligned}$$

As correntes que fluem através de  $C$ ,  $I_{Z_C}$ , e através de  $R_1$ ,  $I_{R_1}$ , são

$$\begin{aligned} I_{Z_C} &= \frac{V}{Z_C} \\ &= 0.3 e^{j 2.36} \, \text{A} \\ I_{R_1} &= \frac{V}{R_1} \\ &= 7.7 e^{j 0.79} \, \text{mA} \end{aligned}$$

A corrente que flui através da série de elementos constituída por  $L$  e  $R_2$  é

$$I_{LR_2} = 1 e^{j0.79} \text{ A}$$

2. Para que exista máxima transferência de potência a  $f = 35 \text{ kHz}$  então  $Z_L$  deve ser igual a  $Z_S^*$  para esta frequência.  $Z_S$  corresponde à série de  $R$  com

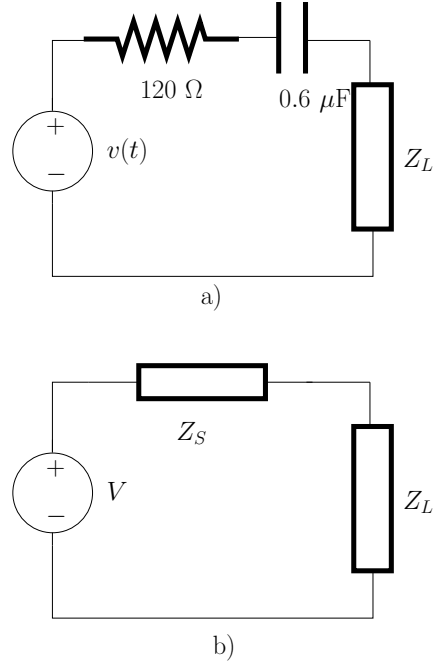


Figura 5: a) Circuito do problem 2 b) Circuito equivalente.

a impedância do condensador  $Z_C$  (ver figura 5):

$$\begin{aligned} Z_S &= R + \frac{1}{j 2 \pi f C} \Big|_{f=35 \text{ kHz}} \\ &= 120 - j 7.58 \Omega \end{aligned}$$

Assim, temos que  $Z_L = Z_S^* = 120 + j 7.58 \Omega$ . Um circuito que implementa a impedância  $Z_L = Z_S^*$  a  $f = 35 \text{ kHz}$  é a série de uma resistência de  $120 \Omega$  com uma indutância  $L$  tal que;

$$j 7.58 = j 2 \pi f L \Big|_{f=35 \text{ kHz}}$$

ou seja,  $L = 34.46 \mu\text{H}$ .