

### Resolução da Folha de exercícios N.º 4

1. A figura 1 mostra a representação dos números complexos no diagrama de Argand.

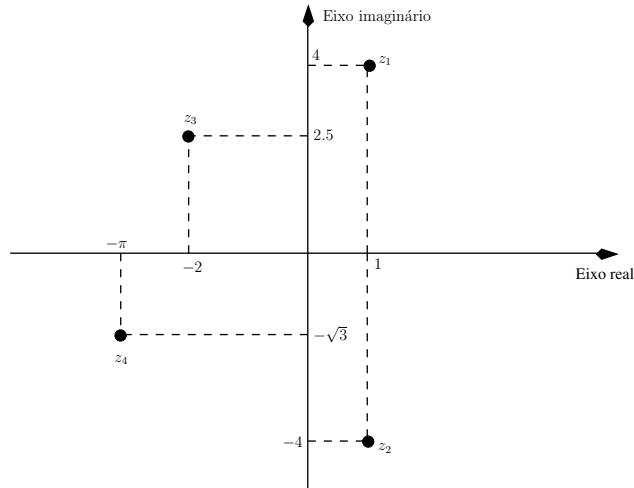


Figura 1: *Representação de números complexos no diagrama de Argand.*

2. (a) 2  
(b)  $j\ 2$   
(c)  $11.25 + j\ 2.5$   
(d)  $0.3562 + j\ 0.3836$
3. (a)  $1.414 \angle 0.785\ (\text{rad})$   
(b)  $1.732 \angle 2.186\ (\text{rad})$   
(c)  $2.022 \angle -0.149\ (\text{rad})$   
(d)  $3.162 \angle -2.562\ (\text{rad})$
4. (a) 0.5  
(b)  $0.75 - j\ 1.3$   
(c)  $-j\ 0.5$   
(d)  $-j\ 0.5$
5. (a) 2  
(b)  $-8$   
(c)  $-13.753 + j\ 9.992$   
(d)  $0.072 + j\ 0.222$   
(e)  $4.511 + j\ 8.142$   
(f)  $0.45 - j\ 0.279$

6. Para cada um dos circuitos sabemos que corrente  $i(t)$  tem a forma genérica:

$$i(t) = I_p \cos(\omega t + \phi)$$

Assim, aplicamos as leis das malhas a cada um dos circuitos da figura 2 de modo a determinar  $I_p$  e  $\phi$ .

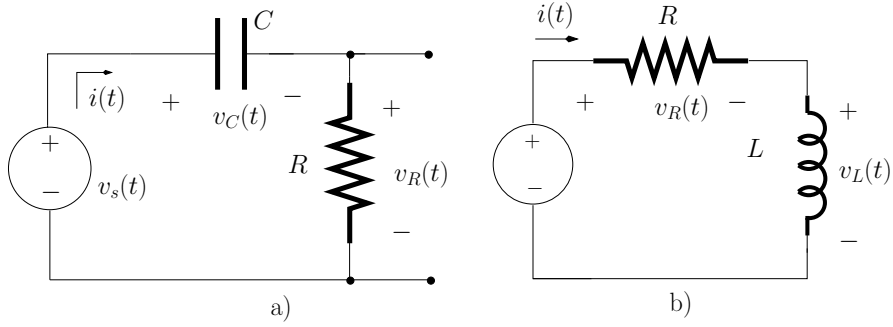


Figura 2: Circuitos do problema 6

(a) *Circuito a)*: Para este circuito temos que:

$$v_s(t) = v_C(t) + v_R(t)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} V_s \cos(\omega t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + R i(t) \\ \Leftrightarrow V_s \cos(\omega t) &= \frac{I_p}{\omega C} \sin(\omega t + \phi) + R I_p \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (1)$$

Sabendo que

$$x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha) = R \cos(\alpha + \beta) \quad (2)$$

com  $R$  e  $\beta$  dados por:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (4)$$

podemos escrever a equação 1 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V_s \cos(\omega t) &= R I_p \cos(\omega t + \phi) - \frac{-I_p}{\omega C} \sin(\omega t + \phi) \\ \Leftrightarrow V_s \cos(\omega t) &= I_p \frac{\sqrt{R^2 \omega^2 C^2 + 1}}{\omega C} \cos(\omega t + \phi + \psi) \end{aligned} \quad (5)$$

com

$$\psi = -\arctan\left(\frac{1}{\omega C R}\right)$$

Para que a equação 5 seja uma igualdade é necessário que as seguintes igualdades se verifiquem:

$$\begin{cases} V_s = I_p \frac{\sqrt{R^2 \omega^2 C^2 + 1}}{\omega C} \\ \omega t = \omega t + \phi + \psi \end{cases} \quad (6)$$

ou seja,

$$\begin{cases} I_p = V_s \frac{\omega C}{\sqrt{R^2 \omega^2 C^2 + 1}} = 19.8 \text{ mA} \\ \psi = \arctan \left( \frac{1}{\omega C R} \right) = 0.12 \text{ rad} \end{cases} \quad (7)$$

(b) *Circuito b*): Para este circuito podemos escrever:

$$\begin{aligned} v_s(t) &= v_R(t) + v_L(t) \\ &= R I_s \cos(\omega t + \phi) - \omega L I_s \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (8)$$

Usando os resultados das equações 2-4 podemos escrever a equação 8 da seguinte forma:

$$V_s \cos(\omega t) = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I_s \cos(\omega t + \phi + \psi) \quad (9)$$

em que

$$\psi = \arctan \left( \frac{\omega L}{R} \right)$$

Para que a equação 9 seja uma igualdade é necessário que as seguintes igualdades se verifiquem:

$$\begin{cases} V_s = \sqrt{R^2 + X_L^2} I_s \\ \omega t = \omega t + \phi + \psi \end{cases} \quad (10)$$

Resolvendo em ordem a  $I_s$  e  $\phi$  obtemos:

$$\begin{aligned} I_s &= \frac{V_s}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \\ &= 37 \text{ mA} \\ \phi &= -\psi \\ &= -0.38 \text{ rad } (-21.8^\circ) \end{aligned}$$

7. Para cada um dos circuitos da figura 3 sabemos que a tensão  $v(t)$  tem a forma genérica:

$$v(t) = V_p \cos(\omega t + \phi)$$

Assim, aplicamos as leis dos nós a cada um dos circuitos da figura 3 de modo a determinar  $V_p$  e  $\phi$ .

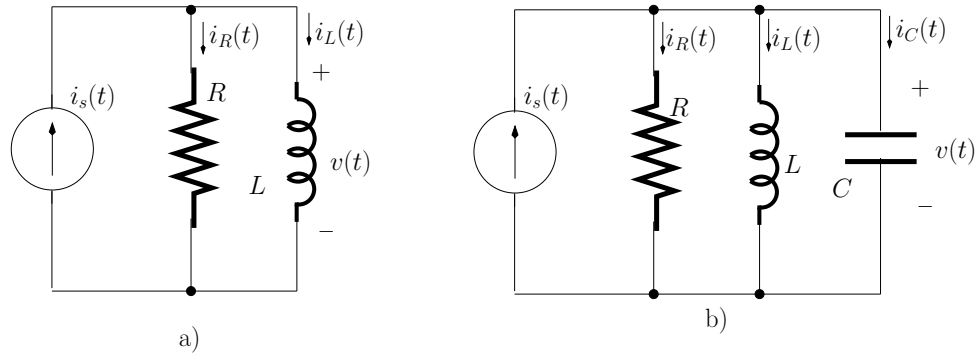


Figura 3: Circuito do problema 7.

(a) *Circuito a)*: Para este circuito podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 i_s(t) &= i_R(t) + i_L(t) \\
 \Leftrightarrow i_s(t) &= \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt \\
 \Leftrightarrow I_s \cos(\omega t) &= \frac{V_p}{R} \cos(\omega t + \phi) + \frac{V_p}{\omega L} \sin(\omega t + \phi) \\
 \Leftrightarrow I_s \cos(\omega t) &= V_p \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \phi + \psi) \quad (11)
 \end{aligned}$$

em que:

$$\psi = -\arctan\left(\frac{R}{\omega L}\right) \quad (12)$$

Resolvendo a equação 11 para obtermos  $V_p$  e  $\phi$  podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 V_p &= I_s \frac{\omega R L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \\
 &= 0.16 \text{ V} \\
 \phi &= \arctan\left(\frac{R}{\omega L}\right) \\
 &= 1.37 \text{ rad}
 \end{aligned}$$

(b) *Circuito b)*: Para este circuito podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 i_s(t) &= i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) \\
 \Leftrightarrow i_s(t) &= \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt + C \frac{dv(t)}{dt} \\
 \Leftrightarrow I_s \cos(\omega t) &= \frac{V_p}{R} \cos(\omega t + \phi) + \left(\frac{V_p}{\omega L} - V_p C \omega\right) \sin(\omega t + \phi) \\
 \Leftrightarrow I_s \cos(\omega t) &= V_p \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{\omega^2 L C - 1}{\omega L}\right)^2} \cos(\omega t + \phi + \psi)
 \end{aligned}$$

em que:

$$\psi = \arctan\left(\frac{R(\omega^2 L C - 1)}{\omega L}\right)$$

Assim obtemos:

$$\begin{aligned}V_p &= I_p \frac{\omega R L}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2 (\omega^2 L C - 1)^2}} \\&= 0.25 \text{ V} \\ \phi &= -\arctan \left( \frac{R(\omega^2 L C - 1)}{\omega L} \right) \\&= -1.25 \text{ rad}\end{aligned}$$