# Resolução da Folha de exercícios N.o 3

1. Aplicamos o método da análise nodal para resolver os vários circuitos da figura 1.

   (a) Para este circuito observamos que a tensão aplicada a $R_1$ é a tensão da fonte $V_s$, ou seja, 5 V. Assim temos que:

   $$\begin{aligned} I_{R_1} &= \frac{V_s}{R_1} \\ &= 73.5 \text{ mA} \end{aligned}$$

   Note que corrente que passa no curto-circuito é igual a $I_{sc} = I_{R_1} + I_s = 273.5$ mA.

   (b) para este circuito podemos escrever

   $$\begin{cases} I_s = I_{R_1} + I_{R_3} + I_{R_5} \\ I_s = I_{R_2} + I_{R_4} + I_{R_5} \\ I_{R_1} = I_{R_2} \end{cases} \tag{1}$$

   ou seja

   $$\begin{cases} I_s = \dfrac{V_A - V_B}{R_1} + \dfrac{V_A - V_C}{R_3} + \dfrac{V_A}{R_5} \\ I_s = \dfrac{V_B}{R_2} + \dfrac{V_C}{R_4} + \dfrac{V_A}{R_5} \\ \dfrac{V_A - V_B}{R_1} = \dfrac{V_B}{R_2} \end{cases} \tag{2}$$

   Resolvendo este sistema em ordem a $V_A$, $V_B$ e $V_C$ temos:

   $$\begin{aligned} V_A &= I_s \frac{R_5(R_3+R_4)(R_2+R_1)}{R_5(R_1+R_2+R_3+R_4)+(R_4+R_3)(R_1+R_2)} \\ &= 30 \text{ V} \\ V_B &= I_s \frac{R_5 R_2(R_3+R_4)}{R_5(R_1+R_2+R_3+R_4)+(R_4+R_3)(R_1+R_2)} \\ &= 14 \text{ V} \\ V_C &= I_s \frac{R_5 R_4(R_2+R_1)}{R_5(R_1+R_2+R_3+R_4)+(R_4+R_3)(R_1+R_2)} \\ &= 18 \text{ V} \end{aligned} \tag{3}$$

   $V_{R_1}$ é igual a $V_A - V_B = 16$ V e $I_{R_1} = 200$ mA.

   (c) Para este circuito podemos escrever as seguintes equações:

   $$\begin{cases} V_C - V_D = V_s \\ I_3 + I_2 + I_4 + I_6 = I_s \\ I_1 + I_s = I_5 \\ I_5 = I_4 + I_6 \end{cases} \tag{4}$$

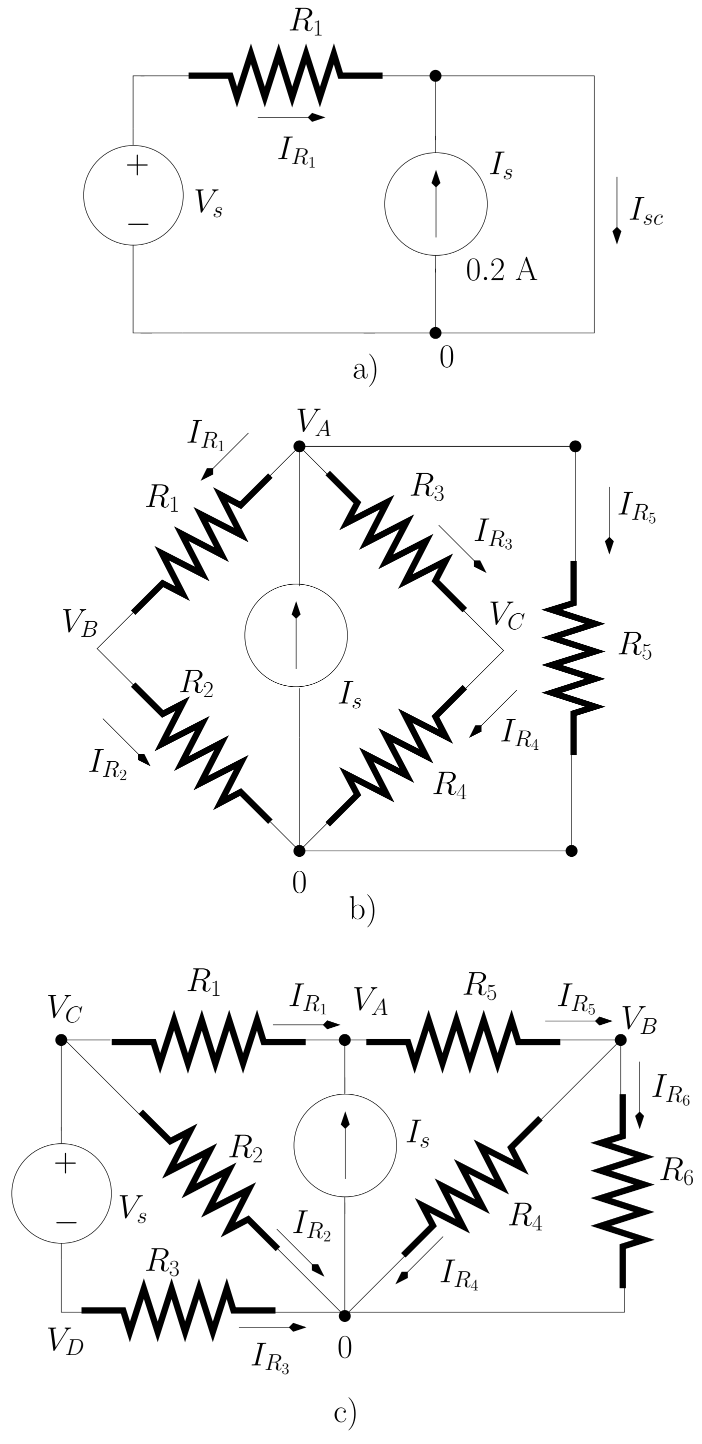


Figura 1: *Circuitos do problema 1.*

ou seja

$$\begin{cases} V_C - V_D = V_s \\ \frac{V_D}{R_3} + \frac{V_C}{R_2} + \frac{V_B}{R_4} + \frac{V_B}{R_6} = I_s \\ \frac{V_C - V_A}{R_1} + I_s = \frac{V_A - V_B}{R_5} \\ \frac{V_A - V_B}{R_5} = \frac{V_B}{R_4} + \frac{V_B}{R_6} \end{cases} \tag{5}$$

Dado que as resistências $R_4$ e $R_6$ estão em paralelo o sistema de equações pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{cases} V_C - V_D = V_s \\ \frac{V_D}{R_3} + \frac{V_C}{R_2} + \frac{V_B}{R_{4,6}} = I_s \\ \frac{V_C - V_A}{R_1} + I_s = \frac{V_A - V_B}{R_5} \\ \frac{V_A - V_B}{R_5} = \frac{V_B}{R_{4,6}} \end{cases} \tag{6}$$

onde $R_{4,6} = R_4||R_6 = 21.7\ \Omega$. Resolvendo em ordem a $V_A$, $V_B$, $V_C$ e $V_D$ obtemos os seguintes valores

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{R_4(R_{4,6} + R_5)[I_s(R_3R_1 + R_2R_1 + R_3R_2) + R_2V_s]}{(R_3R_4 + R_2R_4)(R_{4,6} + R_5 + R_1) + R_3R_2(R_{4,6} + R_4)} \\ &= 6.95 \text{ V} \\ V_B &= \frac{R_4R_{4,6}[I_s(R_3R_1 + R_2R_1 + R_3R_2) + R_2V_s]}{(R_3R_4 + R_2R_4)(R_{4,6} + R_5 + R_1) + R_3R_2(R_{4,6} + R_4)} \\ &= 2.71 \text{ V} \\ V_C &= \frac{R_2[V_sR_4(R_{4,6} + R_5 + R_1) + I_sR_3(R_4R_{4,6} + R_4R_5 - R_1R_{4,6})]}{(R_3R_4 + R_2R_4)(R_{4,6} + R_5 + R_1) + R_3R_2(R_{4,6} + R_4)} \\ &= 7.33 \text{ V} \\ V_D &= \frac{R_3I_sR_2[R_4(R_{4,6} + R_5) - R_1R_{4,6}]}{(R_3R_4 + R_2R_4)(R_{4,6} + R_5 + R_1) + R_3R_2(R_{4,6} + R_4)} \\ &- \frac{R_3V_s[R_4(R_{4,6} + R_5 + R_1) + R_2(R_{4,6} + R_4)]}{(R_3R_4 + R_2R_4)(R_{4,6} + R_5 + R_1) + R_3R_2(R_{4,6} + R_4)} \\ &= -2.67 \text{ V} \end{aligned}$$

$V_{R_1}$ é igual a $V_C - V_A = 0.37$ V e $I_{R_1} = 24.8$ mA.

2. Circuitos equivalentes de Thévenin entre os pontos $A$ e $B$ (ver figura 2).

   - *Circuito b):* A tensão de Thévenin é a tensão entre os pontos $A$ e $B$ determinados no problema anterior ou seja:

$$\begin{aligned} V_{Th} &= V_A \\ &= 30 \text{ V} \end{aligned}$$

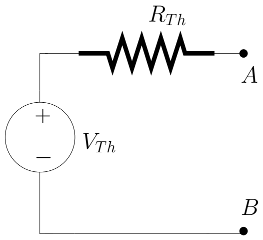


Figura 2: *Circuito equivalente de Thévenin entre os pontos $A$ e $B$.*

A resistência de Thévenin, $R_{Th}$ é obtida determinando a resistência equivalente entre os pontos $A$ e $B$ (depois de substituirmos a fonte de corrente por um circuito aberto!). O circuito equivalente para determinarmos $R_{Th}$ é mostrado na figura 3. Desta figura observamos

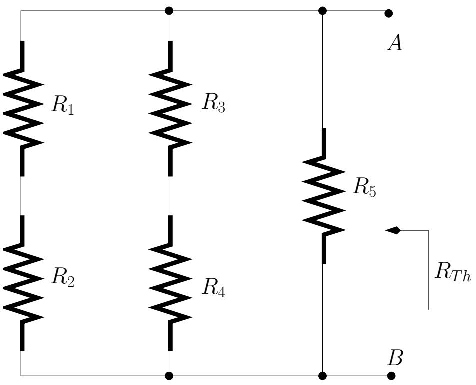


Figura 3: *Circuito equivalente para o cálculo de $R_{Th}$ (entre pontos $A$ e $B$).*

que:

$$\begin{aligned} R_{Th} &= (R_1 + R_2)||(R_3 + R_4)||R_5 \\ &= 42.9\ \Omega \end{aligned}$$

- *Circuito c):* A tensão de Thévenin é a tensão entre os pontos $A$ e $B$ determinados no problema anterior:

$$\begin{aligned} V_{Th} &= V_A - V_B \\ &= 4.24\ \text{V} \end{aligned}$$

A resistência de Thévenin, $R_{Th}$ é obtida determinando a resistência equivalente entre os pontos $A$ e $B$ (depois de substituirmos a fonte de tensão por um curto-circuito e de substituirmos a fonte de corrente por um circuito aberto!). O circuito equivalente para determinarmos $R_{Th}$ é mostrado na figura 4. Desta figura observamos que:

$$\begin{aligned} R_{Th} &= R_5||[(R2||R_3) + (R_4||R_6) + R_1] \\ &= 19.4\ \Omega \end{aligned}$$

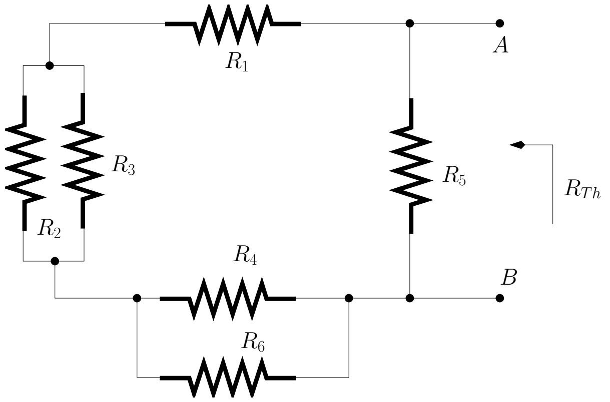


Figura 4: *Circuito equivalente para o cálculo de $R_{Th}$ (entre pontos $A$ e $B$).*

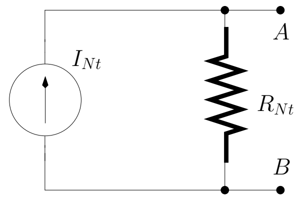


Figura 5: *Circuito equivalente de Norton entre os pontos $A$ e $B$.*

3. Circuitos equivalentes de Norton entre os pontos $A$ e $B$ (ver figura 5).

   - *Circuito b):* A corrente de Norton $I_{Nt}$ pode ser calculada da seguinte forma:

   $$\begin{aligned} I_{Nt} &= \frac{V_{Th}}{R_{Th}} \\ &= 699.3 \text{ mA} \end{aligned}$$

   e a resistência de Norton é igual $R_{Nt} = R_{Th} = 42.9\ \Omega$.

   - *Circuito c):* A corrente de Norton $I_{Nt}$ pode ser calculada da seguinte forma:

   $$\begin{aligned} I_{Nt} &= \frac{V_{Th}}{R_{Th}} \\ &= 219.1 \text{ mA} \end{aligned}$$

   e $R_{Nt} = R_{Th} = 19.4\ \Omega$.

4. Aplicamos o método da análise nodal para resolver os vários circuitos da figura 6.

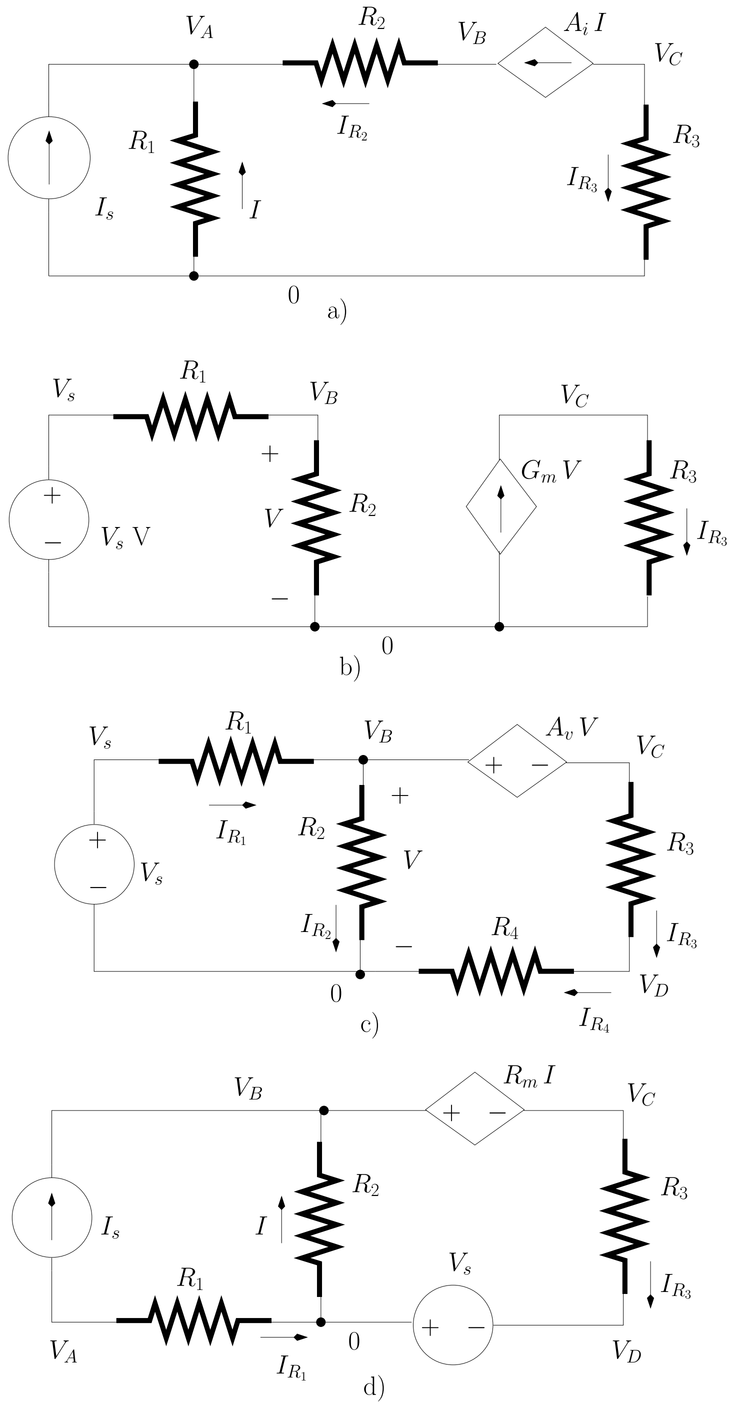


Figura 6: *Circuitos do problema 4.*

(a) Para este circuito podemos escrever

$$\begin{cases} I_s + I + I_2 = 0 \\ I_2 = A_i\, I \\ I = -\dfrac{V_A}{R_1} \\ I_3 = -A_i\, I \end{cases} \tag{7}$$

ou seja,

$$\begin{cases} I_s + I + \dfrac{V_B - V_A}{R_2} = 0 \\ \dfrac{V_B - V_A}{R_2} = A_i\, I \\ I = -\dfrac{V_A}{R_1} \\ \dfrac{V_C}{R_3} = -A_i\, I \end{cases} \tag{8}$$

Resolvendo este sistema em ordem a $V_A$, $V_B$ e $V_C$ obtemos:

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{R_1 I_s}{1 + A_i} \\ &= 1.73 \text{ V} \\ V_B &= \frac{I_s(R_1 - A_i R_2)}{1 + A_i} \\ &= -8.65 \text{ V} \\ V_C &= \frac{I_s A_i R_3}{1 + A_i} \\ &= 16.15 \text{ V} \end{aligned}$$

A tensão aos terminais de $R_3$ é $V_C$ e $I_{R_3} = 230.7$ mA.

(b) Podemos observar que $V = V_B$. Assim podemos escrever:

$$\begin{cases} \dfrac{V_C}{R_3} = G_m\, V \\ V = V_s \dfrac{R_2}{R_2 + R_1} \end{cases} \tag{9}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} V_C &= R_3\, G_m V_s \frac{R_2}{R_2 + R_1} \\ &= 32.1 \text{ V} \end{aligned}$$

A tensão aos terminais de $R_3$ é $V_C$ e $I_{R_3} = 321$ mA.

(c) Para este circuito podemos escrever:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_4 \\ V_B - V_C = A_v V_B \\ I_1 = I_2 + I_3 \end{cases} \tag{10}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \dfrac{V_s - V_B}{R_1} = \dfrac{V_B}{R_2} + \dfrac{V_D}{R_4} \\ \\ V_B - V_C = A_v V_B \\ \\ \dfrac{V_s - V_B}{R_1} = \dfrac{V_B}{R_2} + \dfrac{V_C - V_D}{R_3} \end{cases} \tag{11}$$

Resolvendo em ordem a $V_B$, $V_C$ e $V_D$ obtemos:

$$\begin{aligned} V_B &= \frac{V_s R_2 (R_3 + R_4)}{R_3(R_2 + R_1) + R_1 R_2 (1 - A_v) + R_4 (R_1 + R_2)} \\ &= -0.56 \text{ V} \\ V_C &= \frac{-V_s R_2 (R_3 + R_4)(A_v - 1)}{R_3(R_2 + R_1) + R_1 R_2 (1 - A_v) + R_4 (R_1 + R_2)} \\ &= 5.08 \text{ V} \\ V_D &= \frac{-R_4 V_s R_2 (A_v - 1)}{R_3(R_2 + R_1) + R_1 R_2 (1 - A_v) + R_4 (R_1 + R_2)} \\ &= 4.32 \text{ V} \end{aligned}$$

A tensão aos terminais de $R_3$ é $V_C - V_D = 0.76$ V e $I_{R_3} = 76$ mA.

(d) Para este circuito podemos os seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} V_B - V_C = R_m \dfrac{-V_B}{R_2} \\ \\ V_D = -V_s \\ \\ \dfrac{V_A}{R_1} + \dfrac{V_C - V_D}{R_3} = \dfrac{-V_B}{R_2} \\ \\ \dfrac{V_A}{R_1} = -I_s \end{cases} \tag{12}$$

Resolvendo em ordem a $V_A$, $V_B$, $V_C$ e $V_D$ obtemos:

$$\begin{aligned} V_A &= -I_s R_1 \\ &= -23.4 \text{ V} \\ V_B &= \frac{R_2 (I_s R_3 - V_s)}{R_2 + R_m + R_3} \\ &= 4.6 \text{ V} \\ V_C &= \frac{(I_s R_3 - V_s)(R_2 + R_m)}{R_2 + R_m + R_3} \\ &= -14.8 \text{ V} \\ V_D &= -V_s \\ &= -10 \text{ V} \end{aligned}$$

A tensão aos terminais de $R_3$ é $V_C - V_D = -4.8$ V e $I_{R_3} = -66.7$ mA.

5. Aplicamos o teorema da sobreposição aos circuitos da figura 7 por forma a determinar a corrente $I_{R_2}$.

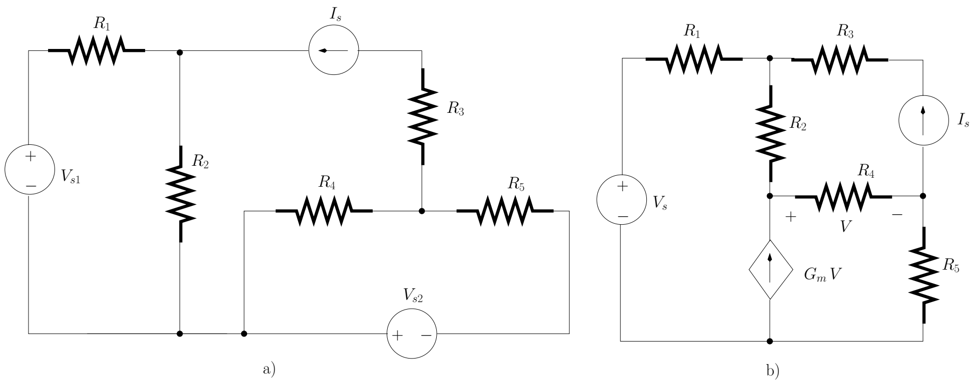


Figura 7: *Circuitos do problema 5.*

(a) *Circuito a)*

- <u>Contribuição de $V_{s1}$</u>: A figura 8 mostra o circuito equivalente para determinarmos a contribuição de $V_{s1}$ para a corrente $I_{R_2}$. A fonte de corrente $I_s$ foi substituida por um circuito aberto e a fonte de tensão $V_{s2}$ foi substituida por um curto-circuito. Para

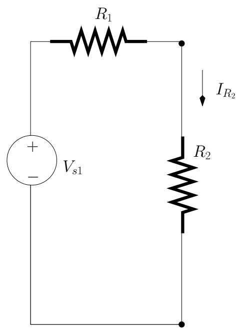


Figura 8: *Circuito equivalente para determinarmos a contribuição de $V_{s1}$ para a corrente $I_{R_2}$.*

este circuito podemos calcular

$$\begin{aligned} I_{R_2} &= \frac{V_{s1}}{R_1 + R_2} \\ &= 40.5 \text{ mA} \end{aligned}$$

- <u>Contribuição de $I_s$</u>: A figura 9 mostra o circuito equivalente para determinarmos a contribuição de $I_s$ para a corrente $I_{R_2}$. As fontes de tensão $V_{s2}$ foram substituidas por curto-circuitos. Observamos que $R_1$ e $R_2$ constituemn efectivamente um divisor resistivo de corrente. Assim temos que:

$$\begin{aligned} I_{R_2} &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_s \\ &= 64.9 \text{ mA} \end{aligned}$$

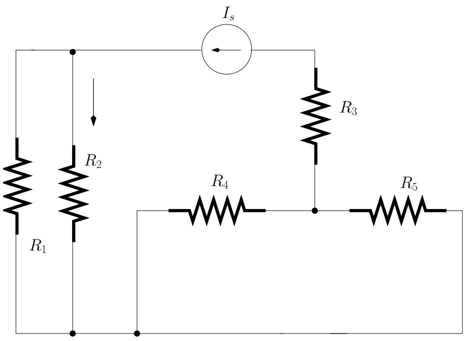


Figura 9: *Circuito equivalente para determinarmos a contribuição de $I_s$ para a corrente $I_{R_2}$.*

- Contribuição de $V_{s2}$: A figura 10 mostra o circuito equivalente para determinarmos a contribuição de $V_{s2}$ para a corrente $I_{R_2}$. A fonte de corrente $I_s$ foi substituida por um circuito aberto e a fonte de tensão $V_{s1}$ foi substituida por um curto-circuito. Neste circuito é óbvio que não existe uma ligação eléctrica entre

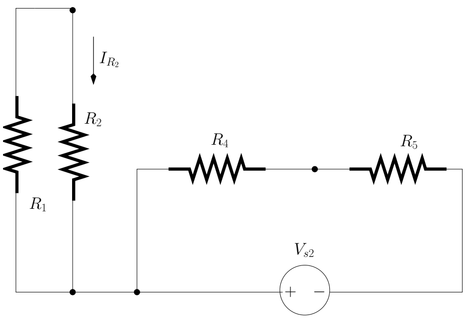


Figura 10: *Circuito equivalente para determinarmos a contribuição de $V_{s2}$ para a corrente $I_{R_2}$.*

  $R_2$ a fonte de tensão $V_{s2}$. Assim a contribuição de $V_{s2}$ para a corrente $I_{R_2}$ é nula. A corrente que flui em $R_2$ (soma de todas as contribuições) é $I_{R_2} = 40.5 + 64.9 = 105.4$ mA.

(b) *Circuito b)*

- Contribuição de $V_{s1}$: A figura 11 mostra o circuito equivalente para determinarmos a contribuição de $V_s$ para a corrente $I_{R_2}$. A fonte de corrente $I_s$ foi substituida por um circuito aberto. Analisamos este circuito usando o método da análise Nodal. Assim, para este circuto podemos escrever as seguintes equações:

$$\begin{cases} I_{R_1} = I_{R_2} \\ I_{R_2} + G_m V = I_{R_4} \\ I_{R_4} = I_{R_5} \\ V = V_C - V_D \end{cases} \tag{13}$$

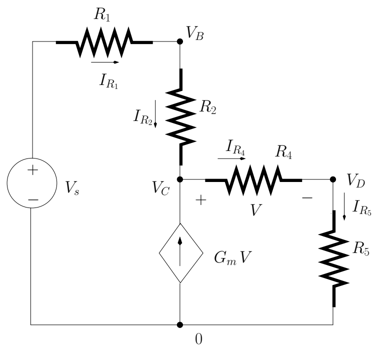


Figura 11: *Circuito equivalente para determinarmos a contribuição de $V_s$ para a corrente $I_{R_2}$.*

ou seja,

$$\begin{cases} \dfrac{V_s - V_B}{R_1} = \dfrac{V_B - V_C}{R_2} \\ \\ \dfrac{V_B - V_C}{R_2} + G_m(V_C - V_D) = \dfrac{V_C - V_D}{R_4} \\ \\ \dfrac{V_C - V_D}{R_4} = \dfrac{V_D}{R_5} \end{cases} \tag{14}$$

Resolvendo em ordem a $V_B$, $V_C$ e $V_D$ obtemos:

$$\begin{aligned} V_B &= -V_s \frac{R_5 + R_4 - G_m R_2 R_4 + R_2}{G_m R_2 R_4 - R_2 - R_5 - R_4 + R_1 G_m R_4 - R_1} \\ &= 1.79 \text{ V} \\ V_C &= -V_s \frac{R_5 + R_4}{G_m R_2 R_4 - R_2 - R_5 - R_4 + R_1 G_m R_4 - R_1} \\ &= -0.08 \text{ V} \\ V_D &= -V_s \frac{R_5}{G_m R_2 R_4 - R_2 - R_5 - R_4 + R_1 G_m R_4 - R_1} \\ &= -0.03 \text{ V} \end{aligned} \tag{15}$$

A corrente em $R_2$ é dada por:

$$\begin{aligned} I_{R_2} &= \frac{V_B - V_C}{R_2} \\ &= 20.8 \text{ mA} \end{aligned}$$

- Contribuição de $I_s$: A figura 12 mostra o circuito equivalente para determinarmos a contribuição de $I_s$ para a corrente $I_{R_2}$. A fonte de tensão $V_s$ foi substituida por um curto-circuito. Analisamos este circuito usando o método da análise Nodal. Para este circuto podemos escrever as seguintes equações:

$$\begin{cases} I_s = I_{R_3} \\ I_s = I_{R_1} + I_{R_2} \\ I_{R_2} + G_m V = I_{R_4} \\ V = (V_C - V_D) \\ I_{R_4} = I_{R_5} + I_s \end{cases} \tag{16}$$

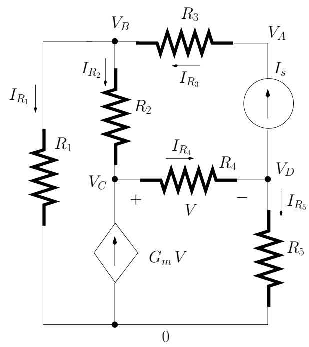


Figura 12: *Circuito equivalente para determinarmos a contribuição de $I_s$ para a corrente $I_{R_2}$.*

ou seja,

$$\begin{cases} I_s = \dfrac{V_A - V_B}{R_3} \\ I_s = \dfrac{V_B}{R_1} + \dfrac{V_B - V_C}{R_2} \\ \dfrac{V_B - V_C}{R_2} + G_m(V_C - V_D) = \dfrac{V_C - V_D}{R_4} \\ \dfrac{V_C - V_D}{R_4} = \dfrac{V_D}{R_5} + I_s \end{cases} \tag{17}$$

Resolvendo este sistema de equações em ordem a $V_A$, $V_B$, $V_C$ e $V_D$ podemos escrever:

$$\begin{aligned} V_A &= I_s \frac{(G_m R_4 - 1)(R_3 R_2 + R_3 R_1 + R_1 R_2)}{G_m R_2 R_4 - R_2 - R_5 - R_4 + R_1 G_m R_4 - R_1} \\ &- I_s \frac{R_3(R_5 + R_4) + R_1 R_4 (1 + G_m R_5)}{G_m R_2 R_4 - R_2 - R_5 - R_4 + R_1 G_m R_4 - R_1} \\ &= 1.3 \text{ V} \\ V_B &= -I_s R_1 \frac{R_5 G_m R_4 + R_4 - G_m R_2 R_4 + R_2}{G_m R_2 R_4 - R_2 - R_5 - R_4 + R_1 G_m R_4 - R_1} \\ &= 0.3 \text{ V} \\ V_C &= -I_s \frac{-R_2 R_5 + R_2 R_5 G_m R_4 + R_5 G_m R_4 R_1 + R_4 R_1}{G_m R_2 R_4 - R_2 - R_5 - R_4 + R_1 G_m R_4 - R_1} \\ &= -5.96 \text{ V} \\ V_D &= I_s R_5 \frac{-R_2 + G_m R_2 R_4 + R_1 G_m R_4 - R_4}{G_m R_2 R_4 - R_2 - R_5 - R_4 + R_1 G_m R_4 - R_1} \\ &= -5.81 \text{ V} \end{aligned}$$

A corrente em $R_2$ é dada por:

$$\begin{aligned} I_{R_2} &= \frac{V_B - V_C}{R_2} \\ &= 69.6 \text{ mA} \end{aligned}$$

A corrente total (soma das contribuições) em $R_2$ é igual a 90.4 mA.