

Resolução da Folha de exercícios N.º 2

Existem vários métodos de análise de circuitos eléctricos de corrente contínua (DC). Todos estes métodos são, sem excepção, baseados nas Leis de Kirchhoff.

Um dos métodos mais eficientes do ponto de vista computacional é o método designado por Análise Nodal. Este método pode ser enunciando da seguinte forma:

- Em cada nó do circuito atribuímos uma tensão. Esta tensão é a diferença de potencial eléctrico entre o nó em consideração e um *nó de referência* também chamado por nó '0' como se mostra na figura 1 a). O nó de

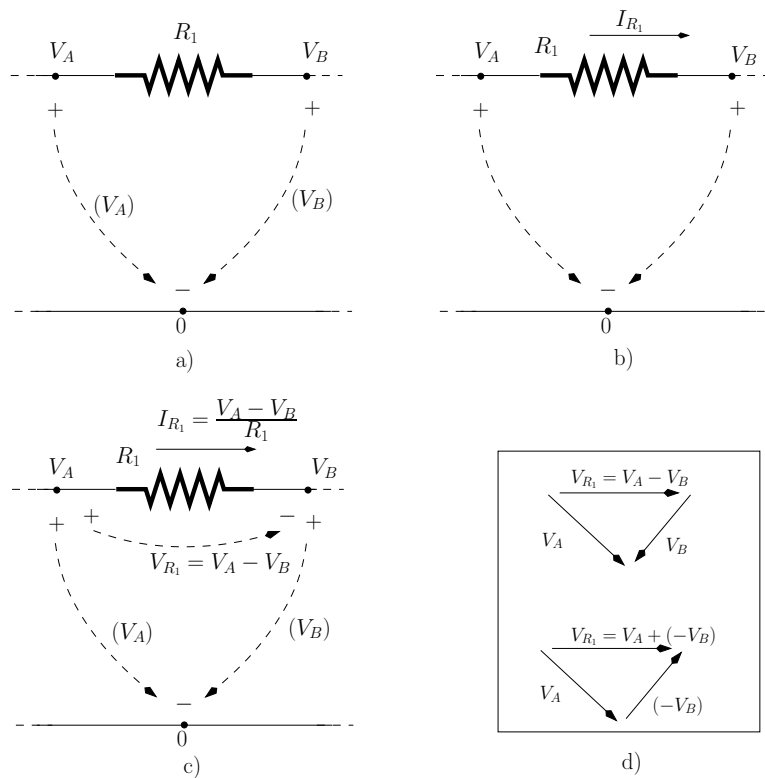


Figura 1: *Aplicação da Análise Nodal; a) Atribuição de tensões nos nós b) Atribuição do sentido da corrente I_{R_1} c) $I_{R_1} = (V_A - V_B) / R_1$. d) Soma de vectores.*

referência é escolhido arbitrariamente (normalmente é o nó com mais ligações eléctricas).

- Para cada ramo do circuito atribuímos uma corrente bem como o seu sentido tal como se mostra na figura 1 b).
- Expressamos a corrente que flui em cada resistência usando a Lei de Ohm, ou seja, a corrente é expressa como a razão entre a diferença de potencial entre os terminais da resistência ($V_A - V_B$) e o seu valor (R_1). Este procedimento é ilustrado na figura 1 c). Note a semelhança entre a forma

como expressamos a diferença de potencial aos terminais da resistência, $V_{R_1} = V_A - V_B$, e o cálculo da diferença (ou soma) de vectores (figura 1 d)).

- Aplicamos a Lei dos Nós ao circuito em causa¹.
1. Aplicamos agora o método exposto para resolver os vários circuitos da figura 2.
- (a) Para este circuito podemos escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} I_{R_1} + I_{R_2} + I_{R_3} = 0 & \text{(Lei dos Nós)} \\ I_{R_4} = I_{R_3} & \text{(Lei dos Nós)} \\ V_B - V_A = V_1 & \text{(Lei das Malhas)} \\ V_B - V_C = V_2 & \text{(Lei das Malhas)} \end{cases} \quad (1)$$

Este sistema de equações pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{V_A}{R_1} + \frac{V_B}{R_2} + \frac{V_D}{R_3} = 0 \\ \frac{V_C - V_D}{R_4} = \frac{V_D}{R_3} \\ V_B - V_A = V_1 \\ V_B - V_C = V_2 \end{cases} \quad (2)$$

Resolvendo este sistema de quatro equações em ordem a V_A , V_B , V_C e V_D temos:

$$\begin{aligned} V_A &= R_1 \frac{R_2 V_2 - V_1 (R_2 + R_3 + R_4)}{R_2 (R_1 R_3 + R_4) + R_1 (R_3 + R_4)} \\ &= -29.3 \text{ mV} \\ V_B &= R_2 \frac{R_1 V_2 + V_1 (R_3 + R_4)}{R_2 (R_1 R_3 + R_4) + R_1 (R_3 + R_4)} \\ &= 1.97 \text{ V} \\ V_C &= \frac{V_1 R_2 (R_3 + R_4) - V_2 (R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_1 R_3 + R_1 R_4)}{R_2 (R_1 R_3 + R_4) + R_1 (R_3 + R_4)} \\ &= -1.03 \text{ V} \\ V_D &= -R_3 \frac{(R_1 + R_2) V_2 - R_2 V_1}{R_2 (R_1 R_3 + R_4) + R_1 (R_3 + R_4)} \\ &= -0.46 \text{ V} \end{aligned}$$

- (b) para este circuito podemos escrever

$$\begin{cases} I_{R_4} = I_{R_1} + I_{R_3} & \text{(Lei dos Nós)} \\ I_{R_2} = I_{R_3} & \text{(Lei dos Nós)} \\ V_A = V_1 & \text{(Lei das Malhas)} \end{cases} \quad (3)$$

¹Embora este método seja, tal como o seu nome indica, baseado na aplicação da Lei dos Nós, a resolução de certos circuitos requer também a aplicação das Leis das Malhas

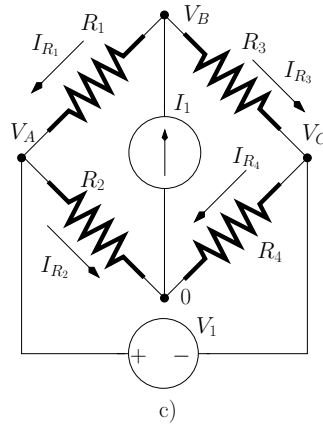
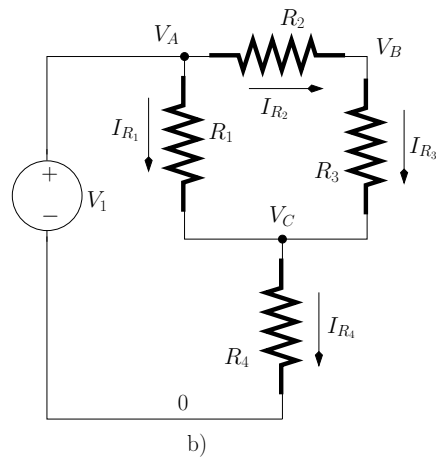
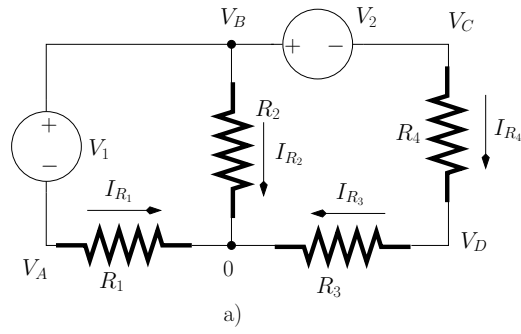


Figura 2: Circuitos do problema 1.

ou seja

$$\begin{cases} \frac{V_C}{R_4} = \frac{V_1 - V_C}{R_1} + \frac{V_B - V_C}{R_3} \\ \frac{V_1 - V_B}{R_2} = \frac{V_B - V_C}{R_3} \end{cases} \quad (4)$$

Resolvendo este sistema em ordem a V_B e V_C temos:

$$\begin{aligned} V_B &= V_1 \frac{R_1 R_3 + R_4(R_1 + R_2 + R_3)}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_4(R_2 + R_3)} \\ &= 1.8 \text{ V} \\ V_C &= V_1 \frac{R_4(R_1 + R_2 + R_3)}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_4(R_2 + R_3)} \\ &= 1.33 \text{ V} \end{aligned} \quad (5)$$

(c) Para este circuito podemos escrever as seguintes equações:

$$\begin{cases} I_1 = I_{R_1} + I_{R_3} & (\text{Lei dos Nós}) \\ I_1 = I_{R_2} + I_{R_4} & (\text{Lei dos Nós}) \\ V_1 = V_A - V_C & (\text{Lei das Malhas}) \end{cases} \quad (6)$$

ou seja

$$\begin{cases} I_1 = \frac{V_B - V_A}{R_1} + \frac{V_B - V_C}{R_3} \\ I_1 = \frac{V_A}{R_2} + \frac{V_C}{R_4} \\ V_1 = V_A - V_C \end{cases} \quad (7)$$

Resolvendo em ordem a V_A , V_B e V_C obtemos os seguintes valores

$$\begin{aligned} V_A &= R_2 \frac{V_1 + R_4 I_1}{R_2 + R_4} \\ &= 8.75 \text{ V} \\ V_B &= V_1 \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_2 + R_4)(R_1 + R_3)} + I_1 \left[\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} \right] \\ &= 14.46 \text{ V} \\ V_C &= R_4 \frac{R_2 I_1 - V_1}{R_2 + R_4} \\ &= 6.75 \text{ V} \end{aligned}$$

2. (a) A resistência equivalente entre os pontos A e B é dada pelo paralelo das três resistências:

$$R_{eq} = (R_1 || R_2) || R_3$$

Seja $R_{1,2}$ a resistência que resulta do paralelo de R_1 com R_2 ;

$$\begin{aligned} R_{1,2} &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \\ &= 22.2 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

A resistência equivalente é dada por

$$\begin{aligned} R_{eq} &= \frac{R_{1,2}R_3}{R_{1,2} + R_3} \\ &= 16.2 \, \Omega \end{aligned}$$

(b) Dado que todas as três resistências estão em série podemos escrever

$$\begin{aligned} R_{eq} &= R_1 + R_2 + R_3 \\ &= 210 \, \Omega \end{aligned}$$

(c) Neste circuito temos que a resistência R_1 está em série com R_2 ;

$$\begin{aligned} R_{1,2} &= R_1 + R_2 \\ &= 400 \, \Omega \end{aligned}$$

$R_{1,2}$ está em paralelo com R_3 :

$$\begin{aligned} R_{1,2,3} &= \frac{R_{1,2}R_3}{R_{1,2} + R_3} \\ &= 114.3 \, \Omega \end{aligned}$$

$R_{1,2,3}$ está em série com R_4 , ou seja

$$\begin{aligned} R_{eq} &= R_{1,2,3} + R_4 \\ &= 384.3 \, \Omega \end{aligned}$$

(d) A resistência R_1 está em série com a resistência R_2 e a resistência R_3 está em série com a resistência R_4 ;

$$\begin{aligned} R_{1,2} &= R_1 + R_2 \\ &= 150 \, \Omega \\ R_{3,4} &= R_3 + R_4 \\ &= 150 \, \Omega \end{aligned}$$

A resistência equivalente resulta do paralelo de $R_{1,2}$ com R_5 e com $R_{3,4}$

$$\begin{aligned} R_{eq} &= R_{1,2} || R_5 || R_{3,4} \\ &= 42.9 \, \Omega \end{aligned}$$

(e) Neste circuito não conseguimos identificar combinações de duas ou mais resistências que estejam ligadas em série ou em paralelo. Assim temos que aplicar uma fonte de tensão V_t ao circuito (entre os pontos A e B) tal como se mostra na figura 3. A razão entre a tensão aplicada e a corrente I_t fornecida ao circuito é, pela Lei de Ohm, a resistência equivalente entre aqueles pontos:

$$R_{eq} = \frac{V_t}{I_t} \quad (8)$$

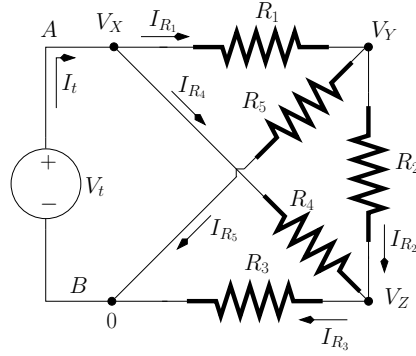


Figura 3: Circuito do problema 2 e).

O circuito pode ser analisado da seguinte forma

$$\begin{cases} I_t = I_{R_1} + I_{R_4} \\ I_t = I_{R_5} + I_{R_3} \\ I_{R_1} = I_{R_5} + I_{R_2} \\ V_X = V_t \end{cases} \quad (9)$$

ou seja,

$$\begin{cases} I_t = \frac{V_t - V_Y}{R_1} + \frac{V_t - V_Z}{R_4} \\ I_t = \frac{V_Y}{R_5} + \frac{V_Z}{R_3} \\ \frac{V_t - V_Y}{R_1} = \frac{V_Y}{R_5} + \frac{V_Y - V_Z}{R_2} \end{cases} \quad (10)$$

Resolvendo este sistema de equações em ordem a V_t , eliminando as incógnitas V_Y e V_Z obtemos:

$$V_t = I_t \frac{R_5 R_3 (R_1 + R_2 + R_4) + R_1 R_4 (R_2 + R_3 + R_5) + R_2 (R_4 R_5 + R_1 R_3)}{R_2 (R_1 + R_3 + R_4 + R_5) + (R_3 + R_5) (R_1 + R_4)}$$

Se dividirmos a equação anterior por I_t obtemos a resistência equivalente;

$$\begin{aligned} \frac{V_t}{I_t} &= \frac{R_5 R_3 (R_1 + R_2 + R_4) + R_1 R_4 (R_2 + R_3 + R_5) + R_2 (R_4 R_5 + R_1 R_3)}{R_2 (R_1 + R_3 + R_4 + R_5) + (R_3 + R_5) (R_1 + R_4)} \\ &= 83.5 \, \Omega \end{aligned}$$

3. Cálculo das capacidades equivalentes

- (a) Neste caso todas as capacidades estão em série. Assim, podemos escrever:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

resolvendo em ordem a C_{eq} e substituindo C_1 , C_2 e C_3 pelos seus valores temos:

$$C_{eq} = 0.67 \, \mu\text{F}$$

- (b) Neste caso todas as capacidades estão em paralelo. Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned} C_{eq} &= C_1 + C_2 + C_3 \\ &= 11 \mu\text{F} \end{aligned}$$

- (c) Neste situação C_1 está em paralelo com C_2 . A capacidade resultante deste paralelo está em série com C_3 ;

$$\begin{aligned} C_{eq} &= \frac{(C_1 + C_2)C_3}{(C_1 + C_2) + C_3} \\ &= 3 \mu\text{F} \end{aligned}$$

4. Cálculo das indutâncias equivalentes

- (a) A indutância L_2 está em série com a indutância L_3 e as indutâncias L_5 e L_6 estão em paralelo. Assim podemos escrever:

$$\begin{aligned} L_{2,3} &= L_2 + L_3 \\ &= 11 \text{ mH} \\ L_{5,6} &= \frac{L_5 L_6}{L_5 + L_6} \\ &= 5.74 \text{ mH} \end{aligned}$$

Assim podemos re-desenhar o circuito da figura 4 a) tal como se mostra na figura 4 b). Neste último circuito podemos verificar que L_4 está em série com $L_{5,6}$;

$$\begin{aligned} L_{4,5,6} &= L_4 + L_{5,6} \\ &= 11.74 \text{ mH} \end{aligned}$$

Observando o circuito da figura 4 c) constatamos que $L_{4,5,6}$ está em paralelo com $L_{2,3}$;

$$\begin{aligned} L_{2,3,4,5,6} &= \frac{L_{4,5,6}L_{2,3}}{L_{4,5,6} + L_{2,3}} \\ &= 5.68 \text{ mH} \end{aligned}$$

e da figura 4 d) constatamos que a indutância equivalente é dada pela série de L_1 com $L_{2,3,4,5,6}$, ou seja:

$$\begin{aligned} L_{eq} &= L_1 + L_{2,3,4,5,6} \\ &= 6.68 \text{ mH} \end{aligned}$$

- (b) A indutância L_2 está em paralelo com a indutância L_3 e a resultante está em série com L_1 e L_4 ;

$$\begin{aligned} L_{eq} &= L_1 + \frac{L_2 L_3}{L_2 + L_3} + L_4 \\ &= 25.26 \text{ mH} \end{aligned} \tag{11}$$

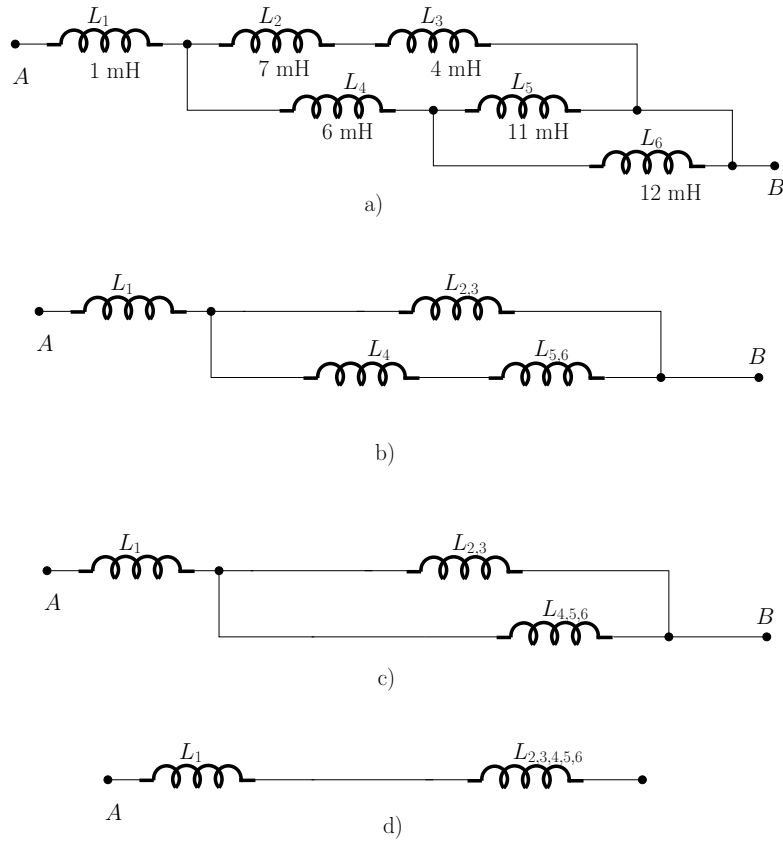


Figura 4: Circuitos do problema 4 a).

5. Cálculo das resistências equivalentes dos circuitos a) e b). Todas a resistência são iguais pelo que são todas designadas por R . Para qualquer destes circuitos não é possível identificar combinações de resistências que partilhem a mesma tensão aos seus terminais ou que sejam percorridas pela mesma corrente, ou seja, não há combinações de resistências ligadas em paralelo ou em série. Assim, é necessário aplicar uma fonte de tensão ao circuito. A razão entre a esta tensão e a corrente fornecida ao circuito é a resistência equivalente pretendida (Lei de Ohm!). Este cálculo é feito seguidamente para cada circuito aplicando a análise Nodal.

(a) Após a atribuição das tensões em cada nó e das correntes em cada resistência aplicamos a Lei dos Nós;

$$\begin{cases} I_t = I_a + I_b + I_c \\ I_t = I_b + I_k + I_l \\ I_a = I_e + I_d \\ I_d = I_f + I_m \\ I_m = I_j + I_h \\ I_k = I_g + I_h \\ I_l = I_e + I_j \end{cases} \quad (12)$$

Temos ainda que $V_1 = V_t$. O sistema de equações pode ser escrito da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_t = \frac{V_t - V_4}{R} + \frac{V_t}{R} + \frac{V_t - V_2}{R} \\ I_t = \frac{V_t}{R} + \frac{V_3}{R} + \frac{V_7}{R} \\ \frac{V_t - V_4}{R} = \frac{V_4 - V_7}{R} + \frac{V_4 - V_5}{R} \\ \frac{V_4 - V_5}{R} = \frac{V_5 - V_2}{R} + \frac{V_5 - V_6}{R} \\ \frac{V_5 - V_6}{R} = \frac{V_6 - V_7}{R} + \frac{V_6 - V_3}{R} \\ \frac{V_3}{R} = \frac{V_2 - V_3}{R} + \frac{V_6 - V_3}{R} \\ \frac{V_7}{R} = \frac{V_4 - V_7}{R} + \frac{V_6 - V_7}{R} \end{array} \right. \quad (13)$$

Resolvendo o sistema de equações em ordem a V_t eliminando V_2, V_3, V_4, V_5, V_6 e V_7 obtemos

$$V_t = \frac{7}{12} R I_t$$

ou seja

$$\begin{aligned} R_{eq} &= \frac{V_t}{I_t} \\ &= \frac{7}{12} R \end{aligned}$$

- (b) Após a atribuição das tensões em cada nó e das correntes em cada resistência aplicamos a Lei dos Nós;

$$\left\{ \begin{array}{l} I_t = I_a + I_b + I_c \\ I_a = I_d + I_e + I_f \\ I_g = I_d + I_c \\ I_h = I_g + I_f \end{array} \right. \quad (14)$$

Temos ainda que $V_1 = V_t$. O sistema de equações pode ser escrito da seguinte forma:

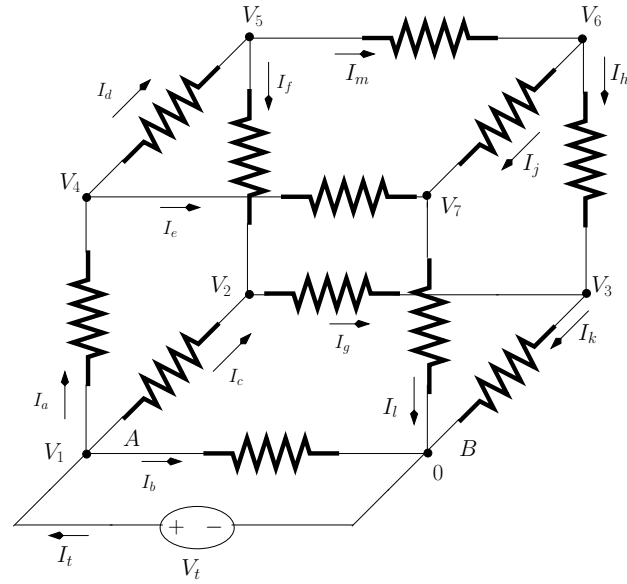
$$\left\{ \begin{array}{l} I_t = \frac{V_t - V_2}{R} + \frac{V_t}{R} + \frac{V_t - V_3}{R} \\ \frac{V_t - V_2}{R} = \frac{V_2 - V_3}{R} + \frac{V_2}{R} + \frac{V_2 - V_4}{R} \\ \frac{V_3 - V_4}{R} = \frac{V_2 - V_3}{R} + \frac{V_t - V_3}{R} \\ \frac{V_4}{R} = \frac{V_3 - V_4}{R} + \frac{V_2 - V_4}{R} \end{array} \right. \quad (15)$$

Resolvendo o sistema de equações em ordem a V_t eliminando V_2 , V_3 e V_4 obtemos

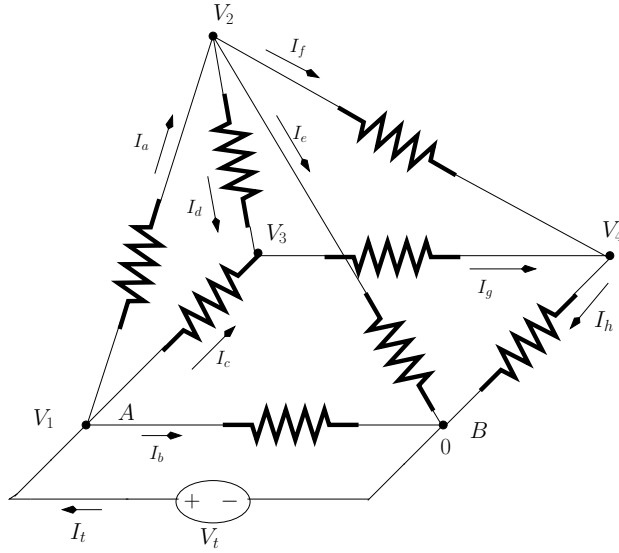
$$V_t = \frac{8}{15} R I_t$$

ou seja

$$\begin{aligned} R_{eq} &= \frac{V_t}{I_t} \\ &= \frac{8}{15} R \end{aligned}$$



a)



b)

Figura 5: Circuitos do problema 5.