Resolução da Folha de exercícios N.o 1

1. A corrente $i(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned} i(t) &= C\,\frac{d\,v(t)}{dt} \\ &= 10^{-6}\,2\,\pi\,1000\cos(2\,\pi\,100\,t+\pi/4)\ \text{A} \\ &= 6.3\,\cos(2\,\pi\,100\,t+\pi/4)\ \text{mA} \end{aligned}$$

   A figura 1 mostra as formas de onda para a tensão e corrente no condensador. A tensão de pico é 10 Volt e a corrente de pico é 6.3 mA. A frequência das fomas de onda é 100 Hz e o período é 0.01 s.

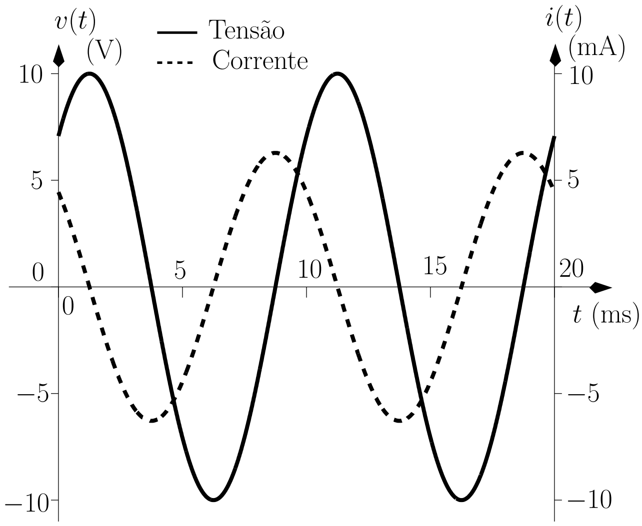

Figura 1: *Formas de onda para a tensão e corrente no condensador.*

2. A tensão aos terminais da bobine é dada por:

$$\begin{aligned} v(t) &= L\,\frac{d\,i(t)}{dt} \\ &= -3\times10^{-3}\,2\,\pi\,5000\times20\times10^{-3}\sin(2\,\pi\,5000\,t)\ \text{V} \\ &= -1.9\,\sin(2\,\pi\,5000\,t)\ \text{V} \end{aligned}$$

   A figura 2 mostra as formas de onda para a tensão e corrente na bobine.

3. A resolução do tipo de circuitos que se mostram na figura 4 implica a aplicação da Lei das Malhas e da Lei dos Nós e ainda a aplicação da Lei de Ohm. Uma das maneiras sistemáticas (ou método) de resolver *qualquer* circuito DC pode ser enunciada da seguinte forma:

   - Para cada resistência do circuito estipula-se (de forma arbitrária) uma direcção para a corrente que flui na resistência tal como se exemplifica na figura 3 a);

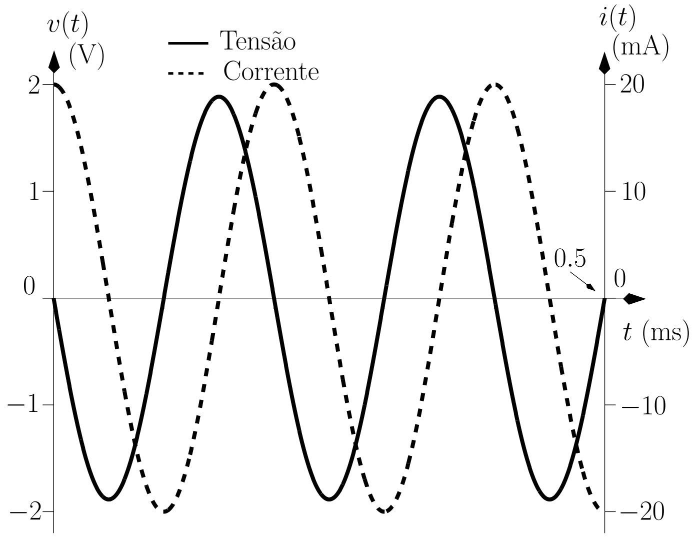

Figura 2: *formas de onda para a tensão e corrente na bobine.*

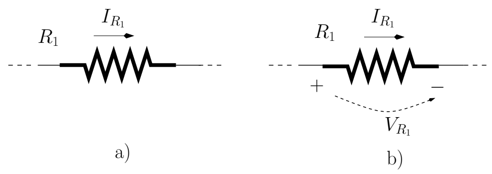

Figura 3: *a) Atribuição do sentido da corrente I_{R_1} na resistência R_1. b) Atribução da tensão V_{R_1} aos terminais da resistência em conformidade com o sentido da corrente I_{R_1}.*

- Seguidamente, atribui-se uma tensão aos terminais da resistência em que o potêncial mais negativo fica colocado na direcção da seta que indica o sentido da corrente tal como se exemplifica na figura 3 b),
- O circuito pode agora ser resolvido aplicando as leis da Malhas e dos Nós e ainda a Lei de Ohm.

Para cada circuito da figura 4 atribuiram-se correntes e tensões aos terminais de cada resistência de acordo com o método enunciado.

- **Circuito a)**: Aplicando a Lei do Nós, ao nó X, podemos escrever:

$$\begin{aligned} I_{R_1} &= I_1 + I_2 \\ &= 0.7 \text{ mA} \end{aligned}$$

Aplicando a Lei de Ohm temos que

$$\begin{aligned} V_{R_1} &= I_{R_1}\, R_1 \\ &= 0.7 \times 100 \\ &= 70 \text{ V} \end{aligned}$$

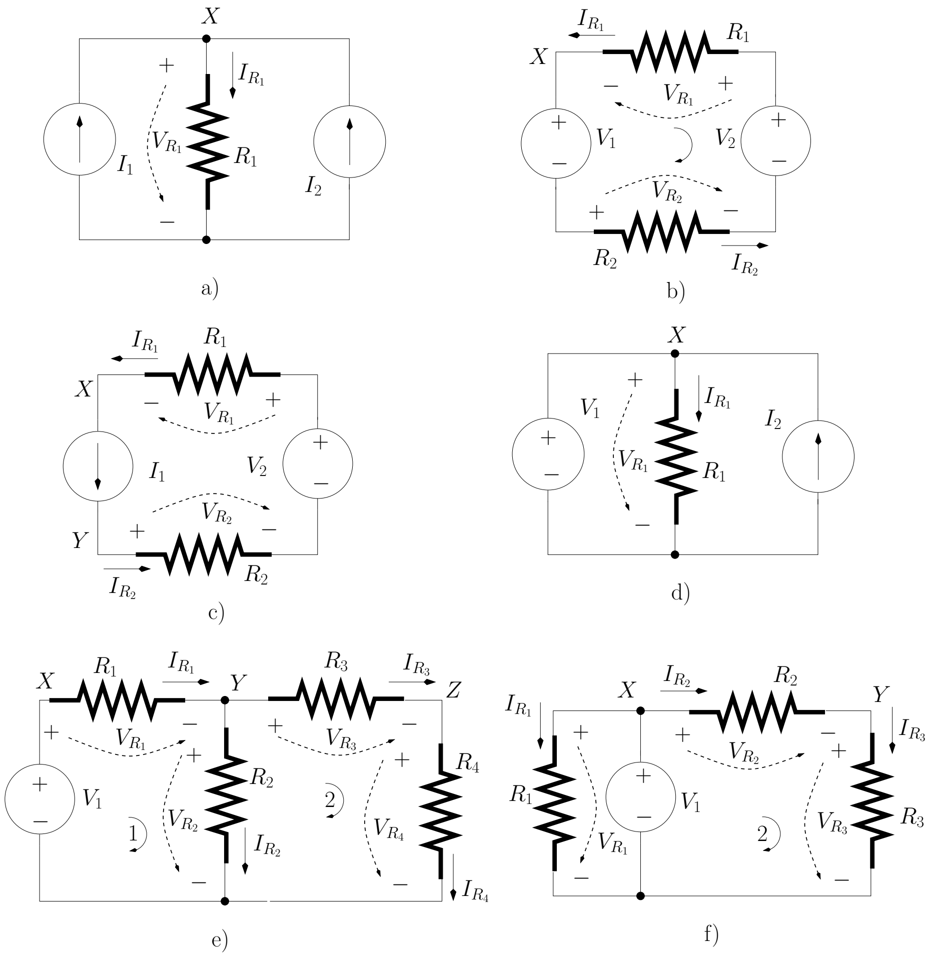

Figura 4: *Circuitos do problema 3.*

- **Circuito b)**: Aplicando a Lei das malhas a partir do ponto X podemos escrever

$$-V_{R_1} + V_2 - V_{R_2} - V_1 = 0 \tag{1}$$

Por outro lado podemos relacionar V_{R_1} com I_{R_1} e V_{R_2} com I_{R_2} através da lei Ohm, ou seja:

$$V_{R_1} = I_{R_1}\, R_1 \tag{2}$$
$$V_{R_2} = I_{R_2}\, R_2 \tag{3}$$

Substituindo V_{R_1} e V_{R_2}, dados pelas duas equações anteriores na equação 1 podemos escrever

$$-I_{R_1}\, R_1 + V_2 - I_{R_2}\, R_2 - V_1 = 0 \tag{4}$$

Aplicando a lei dos nós (no nó X, por exemplo) é fácil concluir que

$$I_{R_1} = I_{R_2} \tag{5}$$

e agora a equação 4 pode ser escrita da seguinte forma:

$$-I_{R_1}\left(R_1+R_2\right)+V_2-V_1=0 \tag{6}$$

Resolvendo a equação anterior em ordem a I_{R_1} temos:

$$\begin{aligned} I_{R_1} &= \frac{V_2-V_1}{R_1+R_2} \\ &= \frac{3-2}{270} \\ &= 3.7 \text{ mA} \end{aligned}$$

Através das equações 5, 2 e 3 obtemos os seguintes valores:

$$\begin{aligned} I_{R_2} &= 3.7 \text{ mA} \\ V_{R_1} &= 100 \times 3.7 \times 10^{-3} \\ &= 0.37 \text{ V} \\ V_{R_2} &= 170 \times 3.7 \times 10^{-3} \\ &= 0.63 \text{ V} \end{aligned}$$

- **Circuito c)**: Neste circuito podemos vericar que a corrente em cada um dos ramos do circuito **é imposta** pela fonte de corrente I_1. De facto, aplicando a lei do Nós aos nós X e Y, é fácil concluir que:

$$\begin{aligned} I_{R_1} &= I_1 \\ &= 0.2 \text{ A} \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} I_{R_2} &= I_1 \\ &= 0.2 \text{ A} \end{aligned}$$

Aplicando a Lei de Ohm temos que:

$$\begin{aligned} V_{R_1} &= I_{R_1} R_1 \\ &= 0.2 \times 10 \\ &= 2 \text{ V} \\ V_{R_2} &= I_{R_2} R_2 \\ &= 0.2 \times 12 \\ &= 2.4 \text{ V} \end{aligned}$$

- **Circuito d)**: Neste circuito podemos vericar que a tensão aos terminais da resistência **é imposta** pela fonte de tensão V_1. De facto, aplicando a lei das malhas, é fácil concluir que:

$$-V_1+V_{R_1}=0$$

ou seja,

$$\begin{aligned} V_{R_1} &= V_1 \\ &= 2 \text{ V} \end{aligned}$$

Aplicando a Lei de Ohm temos que:

$$\begin{aligned} I_{R_1} &= \frac{V_{R_1}}{R_1} \\ &= 20 \text{ mA} \end{aligned}$$

É interessante verificar que a fonte de tensão *absorve* uma corrente igual a 0.48 mA. (Sugestão: aplique a lei dos Nós ao nó X.)

- **Circuito e)**: Aplicando a lei das malhas à malha 1 (a partir do ponto X) e à malha 2 (a partir do ponto Y) podemos escrever

$$\text{Malha 1}: \quad V_{R_1} + V_{R_2} - V_1 = 0 \tag{7}$$

$$\text{Malha 2}: \quad V_{R_3} + V_{R_4} - V_{R_2} = 0 \tag{8}$$

Aplicando a Lei dos Nós aos nós Y e Z podemos escrever

$$\text{Nó } Y: \quad I_{R_1} = I_{R_2} + I_{R_3} \tag{9}$$

$$\text{Nó } Z: \quad I_{R_3} = I_{R_4} \tag{10}$$

Por outro lado, e pela Lei de Ohm, temos que:

$$V_{R_1} = I_{R_1}\, R_1 \tag{11}$$

$$V_{R_2} = I_{R_2}\, R_2 \tag{12}$$

$$V_{R_3} = I_{R_3}\, R_3 \tag{13}$$

$$V_{R_4} = I_{R_4}\, R_4 \tag{14}$$

e usando os resultados das últimas quatro equações nas equações 7 e 8 e usando novamente as equações 9 e 10 podemos escrever o seguinte sistema com quatro equações:

$$\begin{cases} I_{R_1}\, R_1 + I_{R_2}\, R_2 - V_1 = 0 \\ I_{R_3}\, R_3 + I_{R_4}\, R_4 - I_{R_2}\, R_2 = 0 \\ I_{R_1} = I_{R_2} + I_{R_3} \\ I_{R_3} = I_{R_4} \end{cases} \tag{15}$$

Resolvendo este sistema de equações temos

$$\begin{aligned} I_{R_1} &= V_1 \frac{R_2 + R_3 + R_4}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)} \\ &= 5.9 \text{ mA} \\ I_{R_2} &= V_1 \frac{R_3 + R_4}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)} \\ &= 2.2 \text{ mA} \\ I_{R_3} &= \frac{R_2}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)} \\ &= 3.7 \text{ mA} \\ I_{R_4} &= \frac{R_2}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)} \\ &= 3.7 \text{ mA} \end{aligned}$$

- **Circuito f)**: Neste circuito observamos que (à semelhança do circuito d)) a fonte de tensão V_1 está aplicada aos terminais de R_1 e portanto podemos escrever

$$\begin{aligned} V_{R_1} &= V_1 \\ &= 2 \text{ V} \end{aligned} \tag{16}$$

e usando a Lei de Ohm podemos obter a corrente que flui em R_1;

$$\begin{aligned} I_{R_1} &= \frac{V_{R_1}}{R_1} \\ &= \frac{2}{500} \\ &= 4 \text{ mA} \end{aligned}$$

Aplicando a Lei da Malhas à malha 2, a partir do ponto X, podemos escrever:

$$V_{R_2} + V_{R_3} - V_1 = 0 \tag{17}$$

Usando a lei de Ohm esta equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$I_{R_2}\, R_2 + I_{R_3}\, R_3 - V_1 = 0 \tag{18}$$

Aplicando a Lei dos Nós ao nó Y temos que

$$I_{R_3} = I_{R_2} \tag{19}$$

Usando este resultado podemos re-escrever a equação 18 :

$$I_{R_2}\,(R_2 + R_3) - V_1 = 0 \tag{20}$$

Resolvendo em ordem a I_{R_2} temos:

$$\begin{aligned} I_{R_2} &= \frac{V_1}{R_2 + R_3} \\ &= 7.4 \text{ mA} \end{aligned} \tag{21}$$

Finalmente, podemos calcular a tensão em R_2 e em R_3 usando a Lei de Ohm:

$$\begin{aligned} V_{R_2} &= I_{R_2}\, R_2 \\ &= 0.89 \text{ V} \\ V_{R_3} &= I_{R_3}\, R_3 \\ &= 1.11 \text{ V} \end{aligned}$$