Resolução da Folha de exercícios N.o 12

Problema 1.

- *Circuito a):* A figura 1 a) mostra o circuito equivalente para $t < 0$. Dado

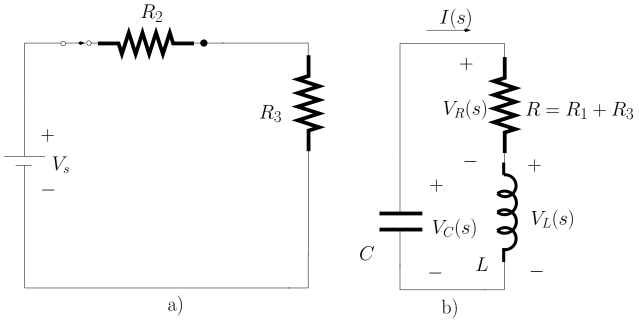

Figura 1: *a) Circuito equivalente para $t < 0$. b) Circuito equivalente para $t \geq 0$.*

que o condensador representa um circuito aberto para DC, não há passagem de corrente em R_1 e a tensão aos terminais de C, V_{co}, é igual à tensão aos terminais de R_3:

$$\begin{aligned} V_{R_3} &= V_s \frac{R_3}{R_2 + R_3} \\ &= 0.44 \text{ V} \end{aligned}$$

A bobina é um curto-circuito para DC. Assim, a tensão aos seu terminais é nula. A corrente que flui neste inductor é a corrente que também flui por R_3:

$$\begin{aligned} I_{lo} &= I_{R_3} \\ I_{R_3} &= \frac{V_{R_3}}{R_3} \\ &= 3.7 \text{ mA} \end{aligned}$$

A figura 1 b) mostra o circuito equivalente para $t \geq 0$. Para este circuito podemos escrever[1]:

$$V_C(s) = V_R(s) + V_L(s)$$

ou seja

$$-\frac{I(s)}{s\,C} + \frac{V_{co}}{s} = R\,I(s) + s\,L\,I(s) - L\,I_{lo}$$

com $R = R_1 + R_3$. Resolvendo a equção em ordem a $I(s)$ temos:

$$I(s) = = \frac{C\,V_{co} + L\,C\,s\,I_{lo}}{1 + s\,C\,R + L\,C\,s^2}$$

[1] Análise no domínio de Laplace

Esta última equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I(s) &= C\,V_{co}\,\frac{\omega_n^2}{s^2+2\,\eta\,\omega_n\,s+\omega_n^2} \\ &+ I_{lo}\,\frac{s}{s^2+2\,\eta\,\omega_n\,s+\omega_n^2} \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{1}{\sqrt{L\,C}} \\ &= 50 \ \text{krad/s} \\ \eta &= \frac{1}{2}\,R\sqrt{\frac{C}{L}} \\ &= 2.2 \end{aligned}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace ($\eta > 1$) temos:

$$\begin{aligned} i(t) &= \underbrace{C\,V_{co}\,\frac{\omega_n}{\sqrt{\eta^2-1}}\,\sinh\left(\omega_n\,\sqrt{\eta^2-1}\,t\right)\,e^{-t\,\eta\,\omega_n}\,u(t)}_{\text{Contribuição de } V_{co}} \\ &+ \underbrace{I_{lo}\left[\cosh\left(\omega_n\,\sqrt{\eta^2-1}\,t\right)-\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-1}}\,\sinh\left(\omega_n\,\sqrt{\eta^2-1}\,t\right)\right]\,e^{-t\,\eta\,\omega_n}\,u(t)}_{\text{Contribuição de } I_{lo}} \end{aligned}$$

A figura 2 mostra $i(t)$ em função do tempo.

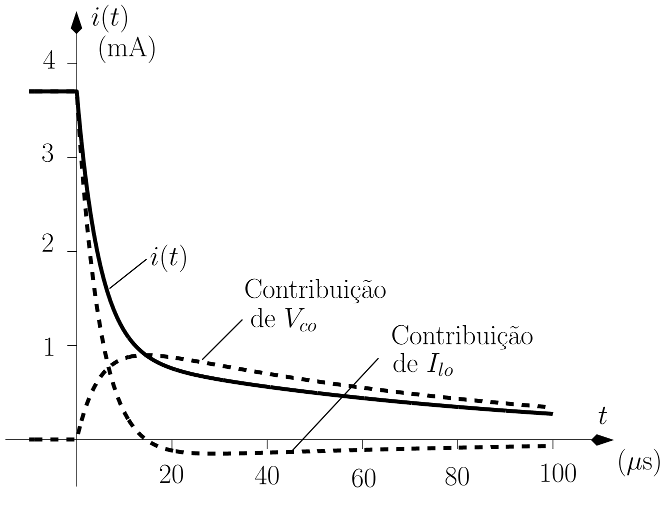

Figura 2: *A corrente* $i(t)$.

- *Circuit b):* A figure 3 a) mostra o circuito equivalente para $t < 0$. A tensão aos terminais do condensador é igual à tensão aos terminais de R_1

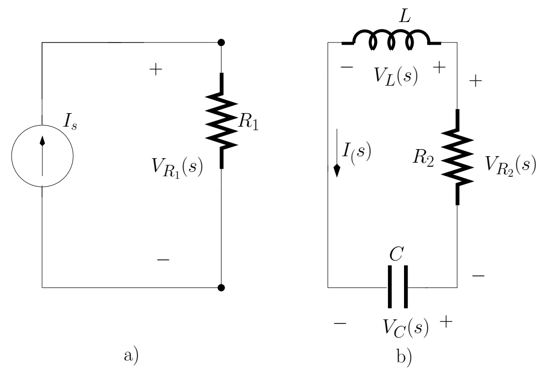

Figura 3: *a) Circuito equivalente para $t < 0$. b) Circuito equivalente para $t \geq 0$.*

dada por:

$$\begin{aligned} V_{co} &= V_{R_1} \\ &= I_s\, R_1 \\ &= 2 \text{ V} \end{aligned}$$

A corrente através da bobina é nula dado que o condensador não conduz (circuito aberto).

A figura 3 b) mostra o circuito equivalente para $t \geq 0$. Para este circuito podemos escrever:

$$V_L(s) = V_{R_2} + V_C(s)$$

ou seja,

$$s\, L\, I(s) = -R_2\, I(s) - \frac{I(s)}{s\, C} + \frac{V_{co}}{s}$$

Resolvendo esta equação obtemos:

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{C\, V_{co}}{s^2\, L\, C + s\, C\, R_2 + 1} \\ &= C\,(I_s\, R_1)\, \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\,\eta\,\omega_n\, s + \omega_n^2} \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{1}{\sqrt{L\, C}} \\ &= 14.1 \text{ krad/s} \\ \eta &= \frac{1}{2}\, R_2 \sqrt{\frac{C}{L}} \\ &= 0.35 \end{aligned}$$

Através da transformada inversa de laplace obtemos

$$i(t) = C\, V_{co}\, \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\eta^2}}\, \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\eta^2}\, t\right)\, e^{-t\,\eta\,\omega_n}\, u(t)$$

A figura 4 mostra $i(t)$.

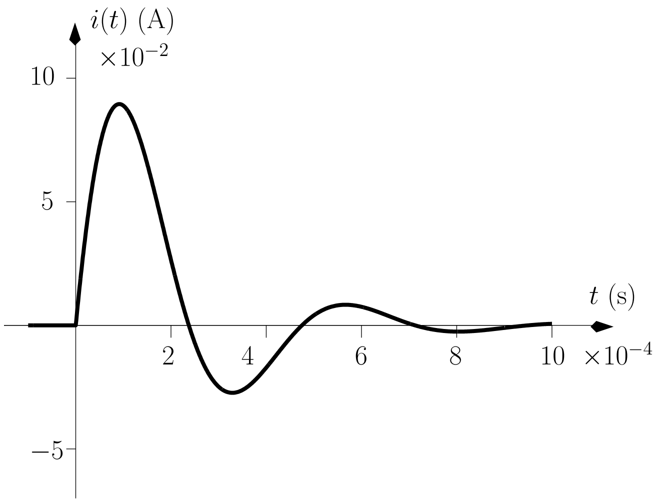

Figura 4: *A corrente $i(t)$.*

Problema 2.

- *Circuit a):* A figura 5 mostra o circuito equivalente no domínio de Laplace.

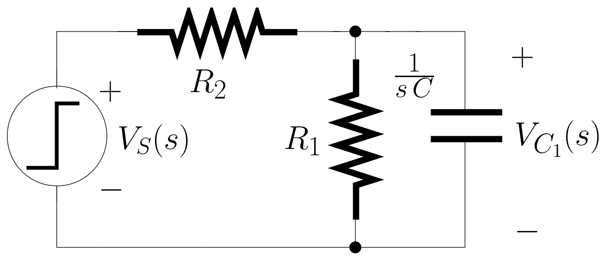

Figura 5: *Circuito equivalente no domínio de Laplace.*

Para este circuito podemos escrever:

$$\begin{aligned} V_{C_1}(s) &= V_S(s)\,\frac{R_1||\frac{1}{s\,C_1}}{\left(R_1||\frac{1}{s\,C_1}\right)+R_2} \\ &= V_S(s)\,\frac{R_1}{R_1+R_2}\times\frac{1}{1+s\,\tau} \end{aligned}$$

com

$$V_S(s) = \frac{V_s}{s}$$
$$\tau = C_1\,\frac{R_1\,R_2}{R_1+R_2}$$

$V_s = 3$ V. Agora $V_{C_1}(s)$ pode ser expressa da seguinte forma:

$$V_{C_1}(s) = \frac{V_s}{s}\times\frac{R_1}{R_1+R_2}\times\frac{1}{1+s\,\tau}$$

Obtendo a transformada inversa de laplace de $V_{C_1}(s)$ temos:

$$v_{C_1}(t) \quad = \quad \frac{V_s\, R_1}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\, u(t)$$

A figura 6 mostra $v_{C_1}(t)$.

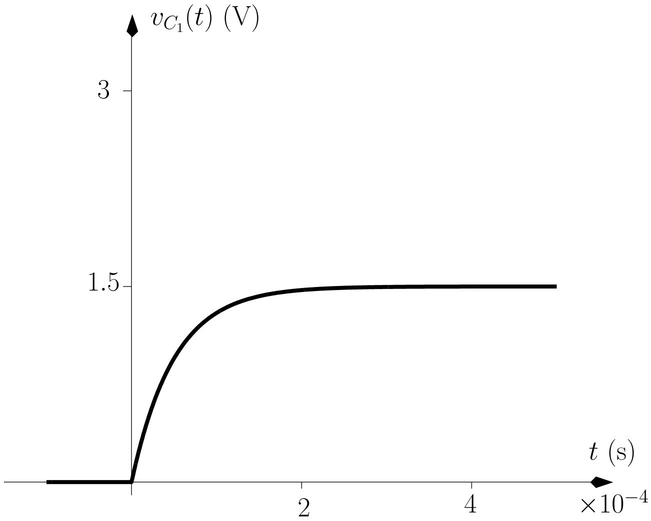

Figura 6: *A tensão aos de terminais de C_1.*

- *Circuit b):* A figura 7 mostra o circuito equivalente no domínio de Laplace.

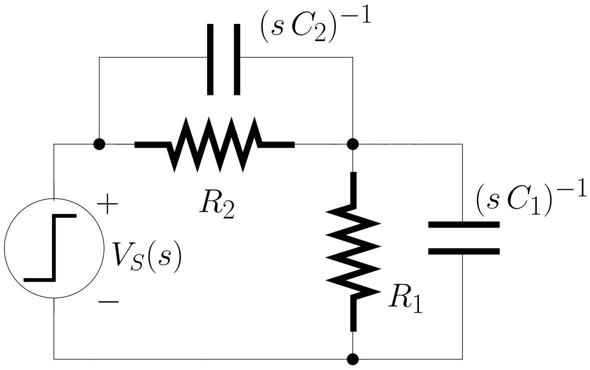

Figura 7: *Circuito equivalente no domínio de Laplace.*

$$V_{C_1}(s) \quad = \quad V_S(s)\,\frac{R_1||\frac{1}{s\,C_1}}{\left(R_1||\frac{1}{s\,C_1}\right) + \left(R_2||\frac{1}{s\,C_2}\right)}$$

ou seja,

$$V_{C_1}(s) \quad = \quad V_S(s)\,\frac{R_1}{R_1 + R_2}\,\frac{1 + s\,R_2\,C_2}{1 + s\,(C_1 + C_2)\frac{R_1\,R_2}{R_1+R_2}}$$

Dado que $R_1\,C_1 = R_2\,C_2$ podemos re-escrever a última equação da seguinte forma:

$$V_{C_1}(s) = V_S(s)\,\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Obtendo a transformada inversa de laplace de $V_{C_1}(s)$ temos:

$$\begin{aligned} v_{C_1}(t) &= \frac{R_1}{R_1 + R_2}\,v_S(t) \\ &= 2.5\,u(t) \end{aligned}$$

Esta última equação mostra que se $R_1\,C_1 = R_2\,C_2$ então a forma de onda se saída é uma réplica (embora atenuada) da forma de onda se saída. Este resultado é muito importante para o projecto de atenuadores incluindo quase todas as pontas-de-prova de osciloscópios.