

### Resolução da Folha de exercícios N.º 11

1. A figura 1 a) mostra circuito equivalente para o cálculo de  $Y_{eq11}$  e  $Y_{eq21}$ .

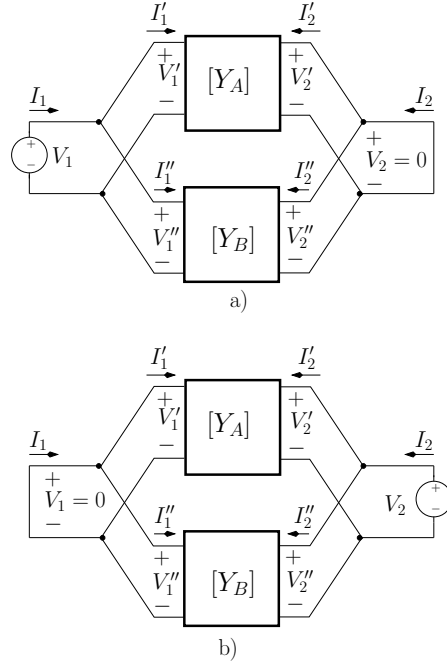


Figura 1: a) Circuito equivalente para o cálculo de  $Y_{eq11}$  e  $Y_{eq21}$ . b) Circuito equivalente para o cálculo de  $Y_{eq12}$  e  $Y_{eq22}$ .

$$Y_{eq11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

$$Y_{eq21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

Dado que  $I_1 = I_1' + I_1''$ ,  $I_2 = I_2' + I_2''$ ,  $V_1 = V_1' = V_1''$  e  $V_2 = V_2' = V_2'' = 0$  podemos escrever as duas equações anteriores da seguinte forma:

$$Y_{eq11} = \left. \frac{I_1'}{V_1'} \right|_{V_2'=0} + \left. \frac{I_1''}{V_1''} \right|_{V_2''=0}$$

$$= Y_{A11} + Y_{B11}$$

$$Y_{eq21} = \left. \frac{I_2'}{V_1'} \right|_{V_2'=0} + \left. \frac{I_2''}{V_1''} \right|_{V_2''=0}$$

$$= Y_{A21} + Y_{B21}$$

A figura 1 b) mostra circuito equivalente para o cálculo de  $Y_{eq12}$  e  $Y_{eq22}$ .

$$Y_{eq12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

$$Y_{eq22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

Agora temos  $I_1 = I'_1 + I''_1$ ,  $I_2 = I'_2 + I''_2$ ,  $V_1 = V'_1 = V''_1 = 0$  e  $V_2 = V'_2 = V''_2$  e as duas últimas equações podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Y_{eq_{12}} &= \left. \frac{I'_1}{V'_2} \right|_{V'_1=0} + \left. \frac{I''_1}{V''_2} \right|_{V''_1=0} \\ &= Y_{A_{21}} + Y_{B_{21}} \\ Y_{eq_{22}} &= \left. \frac{I'_2}{V'_2} \right|_{V'_1=0} + \left. \frac{I''_2}{V''_2} \right|_{V''_1=0} \\ &= Y_{A_{22}} + Y_{B_{22}} \end{aligned}$$

2. A figura 2 a) mostra o circuito equivalente para  $t < 0$ . Dado que o condensador é um circuito aberto para DC a resistência  $R_2$  não conduz. Assim, a queda de tensão aos terminais do condensador é a mesma que aquela existente aos terminais de  $R_3$ , ou seja;

$$\begin{aligned} v_C(t) &= R_3 I_s & t < 0 \\ &= 2 \text{ V} & t < 0 \end{aligned}$$

A figura 2 b) mostra o circuito equivalente para  $t_o \leq t < 0$ . A fonte de corrente está em curto-circuito colocando a resistência  $R_2$  entre os terminais do condensador.

$$\begin{aligned} v_C(t) &= R_2 i_{R_2}(t) & 0 \leq t < t_o \\ \Leftrightarrow \frac{-1}{C} \int_0^t i_{R_2}(t) dt + V_{co} &= R_2 i_{R_2}(t) & 0 \leq t < t_o \end{aligned}$$

em que  $V_{co} = R_3 I_s$ . Se derivarmos a equação anterior obtemos:

$$i_{R_2}(t) + C R_2 \frac{di_{R_2}(t)}{dt} = 0 \quad 0 \leq t < t_o \quad (1)$$

A solução geral para esta equação é:

$$i_{R_2}(t) = \alpha e^{\beta t} \quad 0 \leq t < t_o$$

Substituindo esta solução na eq. 1 obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha e^{\beta t} (1 + \beta R_2 C) &= 0 & 0 \leq t < t_o \\ \Leftrightarrow \beta &= -\frac{1}{R_2 C} \end{aligned}$$

Dado que

$$v_C(t=0) = R_2 \times i_{R_2}(t=0)$$

e que

$$v_C(t=0) = R_3 I_s$$

então temos que;

$$i_{R_2}(t=0) = \frac{R_3 I_s}{R_2}$$

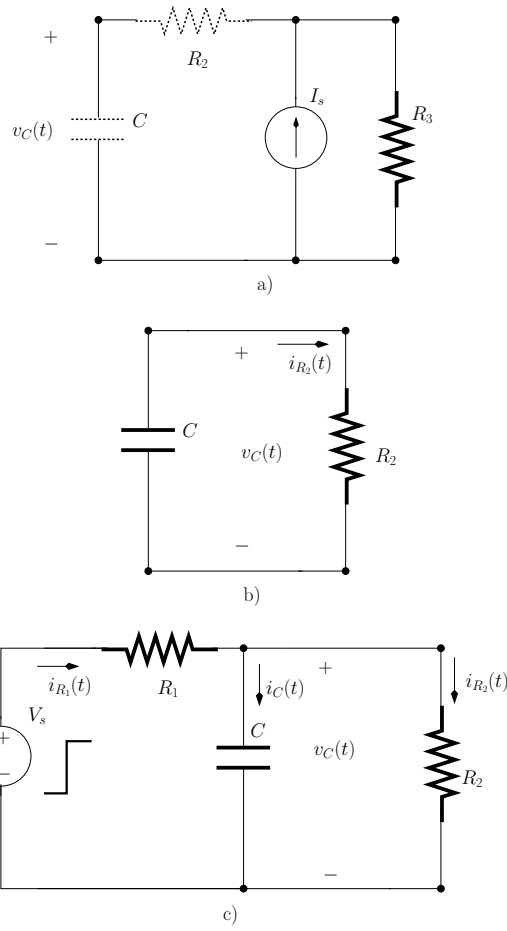


Figura 2: a) Circuito equivalente para  $t < 0$ . b) Circuito equivalente para  $0 \leq t < t_o$ . a) Circuito equivalente para  $t \geq t_o$ .

ou seja,

$$\alpha = \frac{R_3 I_s}{R_2}$$

A tensão aos terminais de  $C$  é:

$$v_C(t) = R_3 I_s e^{-\frac{t}{RC}} \quad 0 \leq t < t_o$$

a tensão aos terminais do condensador para  $t = t_o$  é

$$\begin{aligned} v_C(t_o) &= V'_{co} = R_3 I_s e^{-\frac{t_o}{RC}} \\ &= 0.74 \text{ V} \end{aligned} \quad (2)$$

A figura 2 c) mostra o circuito equivalente para  $t \geq t_o$ . Usando o método da análise nodal podemos escrever:

$$i_{R_1} = i_C(t) + i_{R_2}(t) \quad t \geq t_o$$

ou seja:

$$\begin{aligned}\frac{V_s - v_C(t)}{R_1} &= C \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R_2} & t \geq t_o \\ \Leftrightarrow \frac{V_s}{R_1} &= C \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R'} & t \geq t_o\end{aligned}\quad (3)$$

em que  $R' = R_1 || R_2$ .

A solução desta equação é composta pela soma da solução da equação homogénea com a solução da equação à função constante  $V_s/R_1$ . A solução da equação à função constante é, ela própria, uma constante  $\alpha_F$  que, por definição de solução, satisfaz a eq. 3, ou seja;

$$\begin{aligned}\frac{V_s}{R_1} &= \frac{\alpha_F}{R'} & t \geq t_o \\ \Leftrightarrow \alpha_F &= R' \frac{V_s}{R_1}\end{aligned}$$

A equação homogénea pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}C \frac{dv_{C_h}(t)}{dt} + \frac{v_{C_h}(t)}{R'} &= 0 & t \geq t_o \\ R' C \frac{dv_{C_h}(t)}{v_{C_h}(t)} &= dt & t \geq t_o\end{aligned}$$

integrando esta equação obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{v_o}^{v_{C_h}(t)} R' C \frac{dv_{C_h}(t)}{v_{C_h}(t)} &= - \int_{t_o}^t dt & t \geq t_o \\ \Leftrightarrow R' C \ln \left( \frac{v_{C_h}(t)}{v_o} \right) &= -(t - t_o) & t \geq t_o \\ \Leftrightarrow v_{C_h}(t) &= v_o e^{-\frac{t-t_o}{RC'}} & t \geq t_o\end{aligned}$$

A solução para  $v_C(t)$  é:

$$v_C(t) = R' \frac{V_s}{R_1} + v_o e^{-\frac{t-t_o}{RC'}} \quad t \geq t_o \quad (4)$$

para  $t = t_o$  sabemos que:

$$\begin{aligned}v_C(t_o) &= V'_{co} \\ \Leftrightarrow R' \frac{V_s}{R_1} + v_o &= R_3 I_s e^{-\frac{t_o}{RC}} \\ \Leftrightarrow v_o &= R_3 I_s e^{-\frac{t_o}{RC}} - R' \frac{V_s}{R_1}\end{aligned}$$

Assim  $v_C(t)$  é dado por:

$$v_C(t) = R' \frac{V_s}{R_1} + \left( R_3 I_s e^{-\frac{t_o}{RC}} - R' \frac{V_s}{R_1} \right) e^{-\frac{t-t_o}{RC'}} \quad t \geq t_o$$

A figura 3 mostra a tensão  $v_C(t)$  em função do tempo.

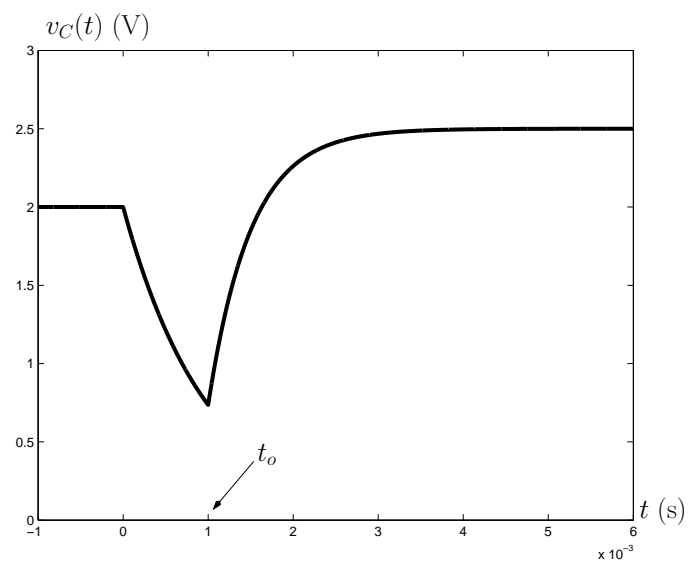


Figura 3:  $v_C(t)$  em função do tempo.