

Resolução da Folha de exercícios N.º 10

1. Resposta natural de circuitos LC e RLC.

- (a) *Circuito a)*: A figura 1 a) mostra o circuito equivalente para $t < 0$. Dado que o condensador é um circuito aberto, a corrente I_s flui

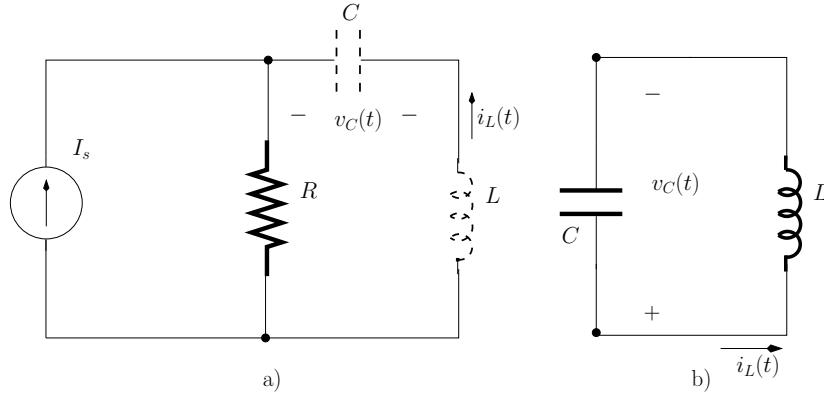


Figura 1: a) *Circuito equivalente para $t < 0$* . b) *Circuito equivalente para $t \geq 0$* .

através de R e a tensão aos terminais do condensador é dada por:

$$v_C(t) = R I_s \quad (t < 0)$$

A corrente no indutor é nula:

$$i_L(t) = 0 \quad (t < 0)$$

A figura 1 b) mostra o circuito equivalente para $t \geq 0$. A tensão aos terminais de C é igual à tensão aos terminais de L pelo que podemos escrever:

$$-\frac{1}{C} \int_0^t i_L(t) dt + V_{co} = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (t \geq 0)$$

em que $V_{co} = v_C(t = 0) = R I_s$.

Derivando esta equação em ordem ao tempo obtemos:

$$L \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i_L(t) = 0 \quad (t \geq 0) \quad (1)$$

Esta equação diferencial homogénea tem duas soluções:

$$\alpha_i e^{\beta_i t}, \quad i = \{1, 2\}, \quad (t \geq 0) \quad (2)$$

tal que:

$$i_L(t) = \alpha_1 e^{\beta_1 t} + \alpha_2 e^{\beta_2 t} \quad (t \geq 0)$$

Substituindo a expressão dada pela eq. 2 na eq. 1 obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha_i e^{\beta_i t} \left(L \beta_i^2 + \frac{1}{C} \right) &= 0 \quad (t \geq 0) \\ \Leftrightarrow \beta_i &= \pm \frac{j}{\sqrt{LC}} \end{aligned}$$

As constantes α_i podem ser calculadas atendendo a que, para $t = 0$, a corrente no indutor é nula e a tensão aos terminais do condensador (que é a mesma que a tensão aos terminais do indutor) é V_{co} , ou seja:

$$i_L(t=0) = 0 \quad (3)$$

$$L \left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0} = V_{co} \quad (4)$$

ou seja

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ L\alpha_1\beta_1 + L\alpha_2\beta_2 = V_{co} \end{cases} \quad (5)$$

Este sistema de equações pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ L\alpha_1 \frac{j}{\sqrt{LC}} + L\alpha_2 \frac{-j}{\sqrt{LC}} = V_{co} \end{cases} \quad (6)$$

Resolvendo este sistema de equações obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\sqrt{LC} V_{co}}{2jL} \\ \alpha_2 &= \frac{-\sqrt{LC} V_{co}}{2jL} \end{aligned}$$

A corrente $i_L(t)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{\sqrt{LC} V_{co}}{2jL} \left(e^{\frac{-t}{\sqrt{LC}}} - e^{\frac{-t}{\sqrt{LC}}} \right) \quad (t \geq 0) \\ &= \frac{\sqrt{LC} V_{co}}{L} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

A tensão aos terminais do indutor é dada por:

$$\begin{aligned} v_L(t) &= L \frac{di_L(t)}{dt} \\ &= V_{co} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

A figura 2 mostra $i_L(t)$ e $v_L(t)$.

- (b) *Circuito b*): A figura 3 a) mostra o circuito equivalente para $t < 0$. Para este circuito podemos escrever:

$$v_C(t) = V_s \frac{R}{R' + R} \quad (t < 0) \quad (7)$$

$$i_L(t) = \frac{V_s}{R' + R} \quad (t < 0) \quad (8)$$

A figura 3 b) mostra o circuito equivalente para $t \geq 0$. Para este circuito podemos escrever:

$$v_C(t) = v_R(t) + v_L(t) \quad (t \geq 0)$$

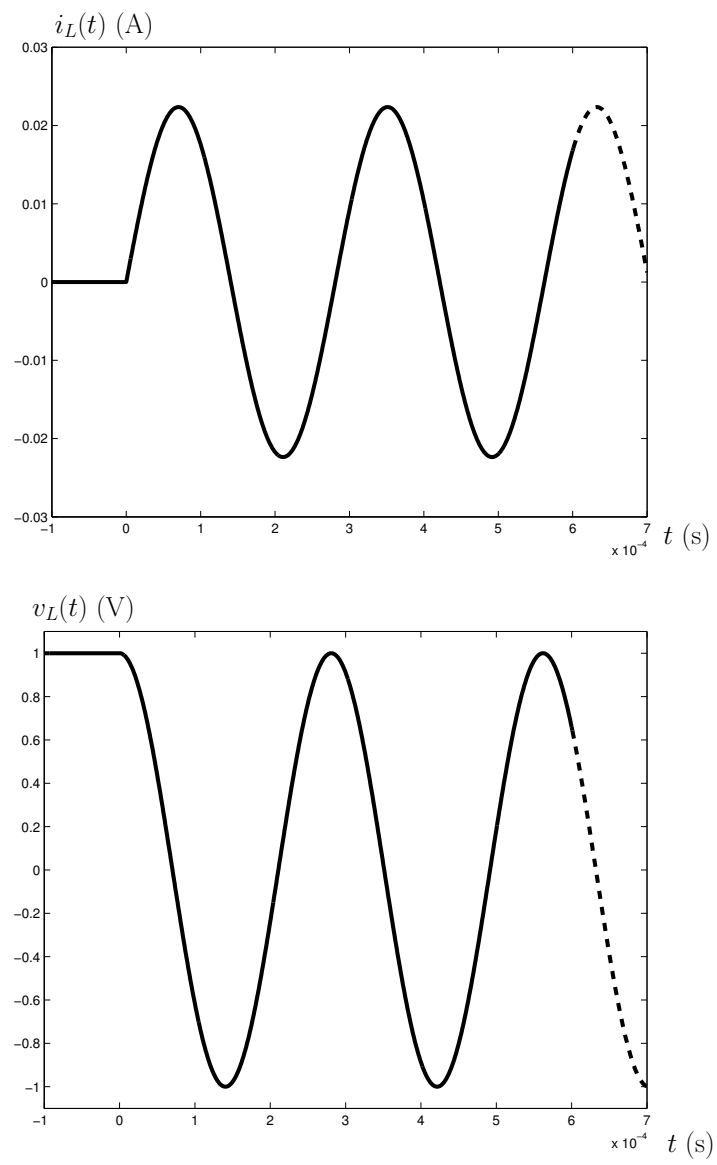


Figura 2: $i_L(t)$ e $v_L(t)$ em função do tempo.

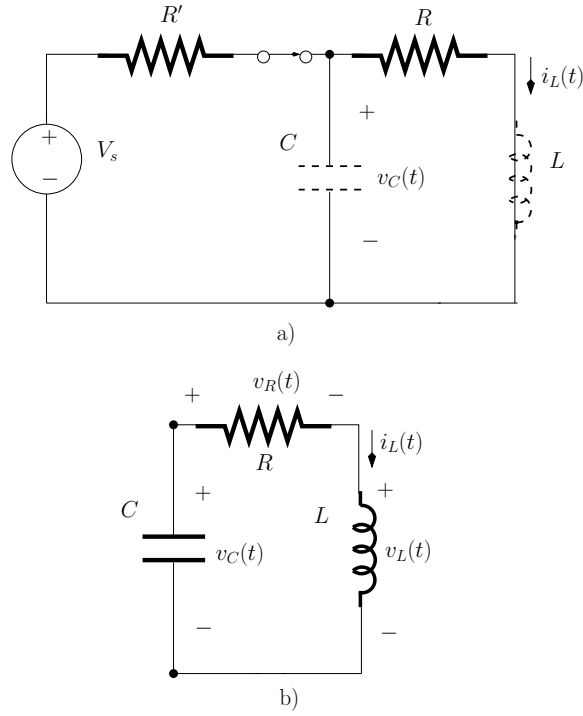


Figura 3: a) Circuito equivalente para $t < 0$. b) Circuito equivalente para $t \geq 0$.

ou seja:

$$-\frac{1}{C} \int_0^t i_L(t) dt + V_{co} = R I_L(t) + L \frac{d i_L(t)}{dt} \quad (t \geq 0)$$

em que V_{co} é a condição inicial associada ao condensador para $t = 0$ dada pela equação 7. Derivando a equação anterior obtemos:

$$L \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + R \frac{d i_L(t)}{dt} + \frac{1}{C} i_L(t) = 0 \quad (t \geq 0) \quad (9)$$

Esta equação diferencial homogénea tem duas soluções:

$$\alpha_i e^{\beta_i t}, \quad i = \{1, 2\}, \quad (t \geq 0) \quad (10)$$

tal que:

$$i_L(t) = \alpha_1 e^{\beta_1 t} + \alpha_2 e^{\beta_2 t} \quad (t \geq 0)$$

Substituindo a expressão dada pela eq. 10 na eq. 9 obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha_i e^{\beta_i t} \left(L \beta_i^2 + R \beta_i + \frac{1}{C} \right) &= 0 \quad (t \geq 0) \\ \Leftrightarrow \beta_i &= \frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} \end{aligned}$$

Dado que $R^2 - 4L/C > 0$ as duas soluções são reais ou seja:

$$\beta_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} \quad (11)$$

$$\beta_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} \quad (12)$$

As constantes α_i podem ser calculadas atendendo a que, para $t = 0$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} i_L(t=0) &= \frac{V_s}{R' + R} \\ v_L(t=0) &= v_C(t=0) - v_R(t=0) = 0 \\ &= v_C(t=0) - R i_L(t=0) \\ &= V_s \frac{R}{R' + R} - R \frac{V_s}{R' + R} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

ou seja:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{V_s}{R' + R}$$

e

$$L \alpha_1 \beta_1 + L \alpha_2 \beta_2 = 0$$

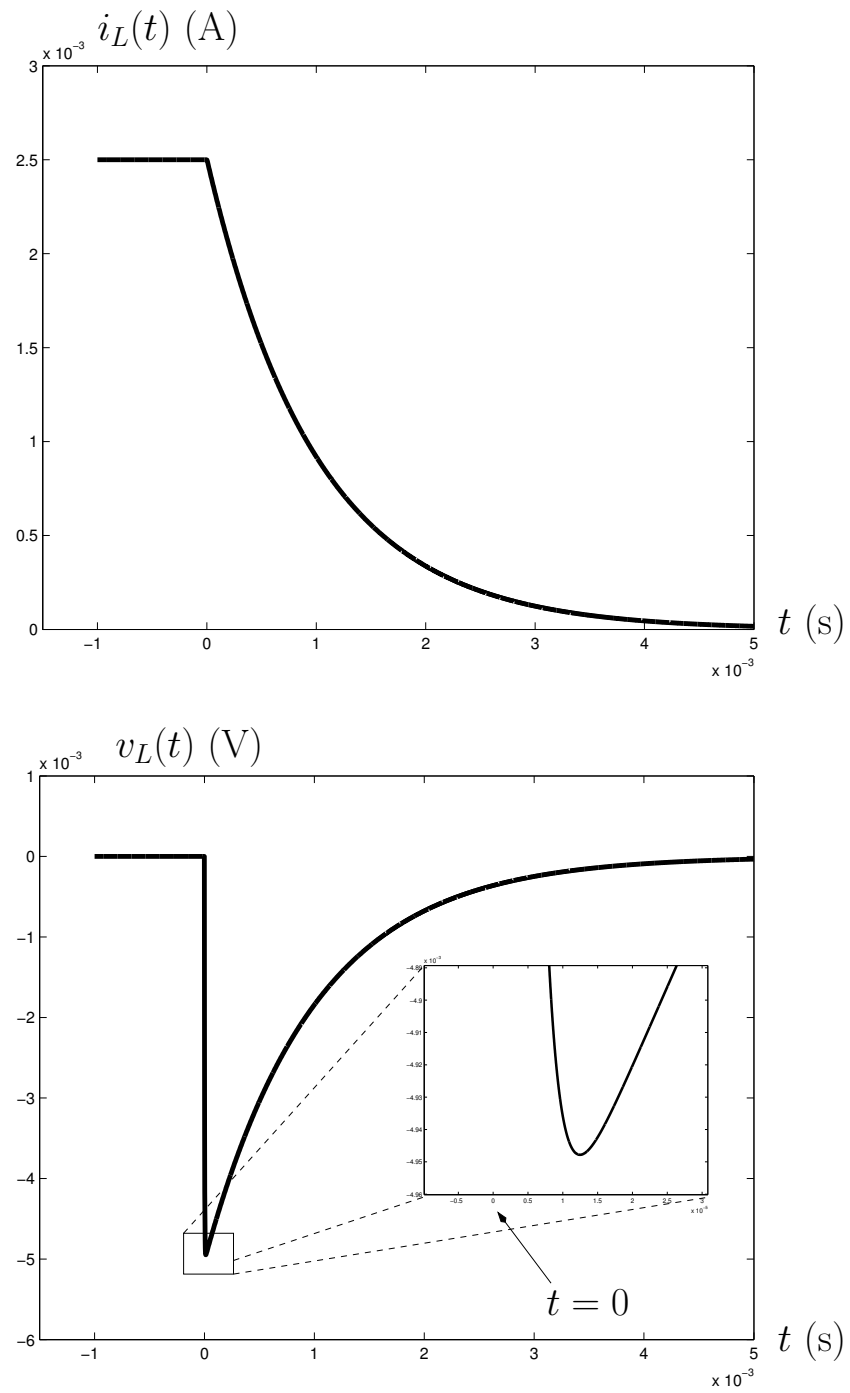
Resolvendo estas duas últimas equações obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{V_s}{R' + R} \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \\ \alpha_2 &= \frac{V_s}{R' + R} \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} \end{aligned}$$

A tensão aos terminais de L é

$$v_L(t) = L \alpha_1 \beta_1 e^{\beta_1 t} + L \alpha_2 \beta_2 e^{\beta_2 t} \quad (t \geq 0)$$

A figura 4 mostra $i_L(t)$ e $v_L(t)$. Em relação à tensão $v_L(t)$ fazemos a seguinte observação: embora a resolução da figura pareça indicar que esta tensão é cerca de 5 mV para $t = 0$ (em clara contradição com a eq. (13)), uma observação ‘mais atenta’ indica que este máximo ocorre a cerca de 13 μs .

Figura 4: $i_L(t)$ e $v_L(t)$.